Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 13. November 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 4.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Es sei $f: G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\ker(f) \subset G$ eine abelsche Untergruppe von G.

(ii) Die Menge $\mathbb{Z}_{>0} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k > 0\}$ bildet bzgl. der Multiplikation eine Gruppe.

(iii) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $\Sigma_3 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(iv) Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Sigma_3 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(v) Ist $f: G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt für alle $h \in \ker(f)$ und $g \in G$, dass $g \cdot h \cdot g^{-1} \in \ker(f)$.

(vi) Ist $f: G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und ist G abelsch, dann ist auch $\mathrm{Bild}(f) \subset G'$ abelsch.

Aufgabe 4.2 [1+1+2 Punkte]

Es sei R ein Ring mit Eins. Ein Element $r \in R$ heißt *Einheit*, falls es ein $s \in R$ gibt, so dass $s \cdot r = 1_R = r \cdot s$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Einheiten $R^\times \subset R$ zusammen mit der Multiplikation in R eine Gruppe ist.

(b) Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bestehend aus allen $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dies ein Unterring ist. Er wird der Ring der *Gaußschen Zahlen* genannt.

(c) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[i]^\times$ und geben Sie einen Isomorphismus zu einer bekannten Gruppe an.

Aufgabe 4.3 [2+1+1 Punkte]
Es sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein fest gewähltes Element. Die Abbildung

$$c_g \colon G \to G, \quad h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$$

heißt *Konjugation mit g*.

(a) Ist diese Abbildung ein Homomorphismus? Ist sie injektiv oder surjektiv?

(b) Welche Abbildung ist c_g, falls G abelsch ist?

(c) Bestimmen Sie $c_{g_1 \cdot g_2}$ für $g_1, g_2 \in G$.

Aufgabe 4.4 [2 Punkte]
Zeigen Sie, dass alle Homomorphismen $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ von der Form f_m sind für ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $f_m(x) \coloneqq mx$. (Hinweis: Betrachten Sie $f(1)$.)

Aufgabe 4.5 [2+2+1 Punkte]
Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und p eine Primzahl, so dass $p \cdot 1_R \coloneqq \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{p} = 0$ gilt. Der *Frobenius Homomorphismus* ist die Abbildung $(-)^p \colon R \to R$. Zeigen Sie:

(a) Für $k = 1, \ldots, p-1$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{p}{k}$ durch p teilbar.

(b) Die Abbildung $(-)^p \colon R \to R$, $x \mapsto x^p$ ist ein Homomorphismus von Ringen. Falls die Bedingung $p \cdot 1_R = 0$ nicht vorausgesetzt wird, stimmt dies jedoch nicht. Überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel.

(c) Für $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist der Frobenius die Identität.