Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 06. November 2019, 8:00-8:10h in H1.

Aufgabe 3.1 [7 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = \|y\|$. Dann ist $x - y$ senkrecht zu $x + y$.

(ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \neq y$ und $\langle x, y\rangle = 0$.

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \neq y$ und $\langle x, y\rangle = 0$.

(iv) Es sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Folgt dann aus $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ für $y, z \in \mathbb{R}^2$ immer, dass $y = z$?

(v) Die Menge $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ ist bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{Q}$ eine Gruppe.

(vi) Sei G eine nicht abelsche Gruppe. Dann existiert keine abelsche Untergruppe $\{e\} \neq H$ von G.

(vii) Die Gruppe Σ_3 ist nicht abelsch.

Aufgabe 3.2 [3 Punkte]

Es seien G und G' zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geqslant 2$. Beweisen Sie, dass immer einer der folgenden Fälle vorliegt:

a) G und G' schneiden sich genau in einem Punkt, oder

b) G und G' haben leeren Schnitt, oder

c) $G = G'$.

Aufgabe 3.3 [1+2 Punkte]

Sei G eine Gruppe und seien $H_1, H_2 \subset G$ Untergruppen von G. Zeigen Sie:

(i) Der Schnitt $H_1 \cap H_2$ ist wieder eine Untergruppe von G.

(ii) Die Vereinigung $H_1 \cup H_2$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn eine der Inklusionen $H_1 \subset H_2$ oder $H_2 \subset H_1$ gilt.

Aufgabe 3.4 [3 Punkte]

Beweisen Sie unter Benutzung des euklidischen Abstands den **Kosinussatz**: Dieser besagt, dass in einem nicht-ausgearteten Dreieck (x, y, z) für den Winkel θ an x gilt, dass

$$d(y, z)^2 = d(x, y)^2 + d(x, z)^2 - 2d(x, y)d(x, z)\cos(\theta).$$

Sie wissen aus der Vorlesung, dass θ der Winkel zwischen $y - x$ und $z - x$ ist und wie Sie ihn berechnen. Leiten Sie den Satz des Pythagoras aus dem Kosinussatz her.

Aufgabe 3.5 [1+2+1 Punkte]

Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die folgende Relation: $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $x = \lambda y$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}P^2$ die Menge der Äquivalenzklassen. Leiten Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}P^2$ und der Menge der Geraden durch 0 im $\mathbb{R}^3$ her. ($\mathbb{R}P^2$ heisst die reell-projektive Ebene.)

(c) Es sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit $0 \notin E$. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $f\colon E \to \mathbb{R}P^2$.