Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 30. Oktober 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 2.1 [7 Punkte]
Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ Abbildungen. Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch f surjektiv.

(ii) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.

(iii) Falls $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.

(iv) Falls $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

(v) Die Zuordnung $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\alpha(x) = \frac{1}{3}x$ definiert eine Abbildung.

(vi) Für $m \in \mathbb{N}$ sei R_m die Relation auf $\mathbb{Z}$, die gegeben ist durch $x \sim y \Leftrightarrow m$ teilt $x - y$. Die Zuordnung

$$\overline{x} \mapsto \overline{x+1}$$

definiert eine Abbildung auf den Quotientenmengen $\mathbb{Z}/R_3 \to \mathbb{Z}/R_4$.

(vii) Es gibt eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 2.2 [4 Punkte]
Betrachten Sie die Menge $\{1, \ldots, n\}$ für $n \geqslant 1$. Wie viele Elemente besitzt die Menge der bijektiven Selbstabbildungen dieser Menge? Beweisen Sie Ihre Antwort mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2.3 [3 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$ax + by = c$$

für Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ und für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entweder die leere Menge, ganz $\mathbb{R}^2$ oder eine Gerade ist. Im letzten Fall geben Sie die Parameterform der Geraden an. (Machen Sie die notwendigen Fallunterscheidungen in Abhängigkeit von a, b und c!)

Aufgabe 2.4 [2+2 Punkte]

(a) Es sei X eine endliche Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. f ist surjektiv.
2. f ist injekiv.
3. f ist bijektiv.

(b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann injektiv ist, wenn für je zwei Teilmengen $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$ gilt:

$$f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2).$$

Aufgabe 2.5 [1+1 Punkte]

Schreiben Sie folgende Aussagen mithilfe von Quantoren und aussagenlogischen Verknüpfungen um, verneinen Sie sie und übersetzen Sie sie wieder zurück in vollständige deutsche Sätze.

(a) Auf jedem Markt gibt es entweder mindestens 5 Äpfel zu kaufen oder gar keinen.

(b) In jedem Flugzeug gibt es einen Sitz, den man nicht nach hinten neigen kann.