Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 12

Abgabetermin: Mittwoch, 22. Januar 2020, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 12.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Es sei $f\colon K^3 \to K^2$ die lineare Abbildung, die bestimmt ist durch die Werte $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = f(e_3) = e_2$, und es sei $i\colon K^2 \to K^3$ die Inklusionsabbildung, also $i(e_i) = e_i$ für $i = 1, 2$.

(i) Die Abbildung $f \circ i$ hat Determinante 1.

(ii) Die Abbildung $i \circ f$ hat Determinante 1.

(iii) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $M(3 \times 3; \mathbb{Q})$ haben übereinstimmende Determinanten.

(iv) Es ist $\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für alle möglichen Werte von a, b, c, d.

(v) Es ist $\det \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für alle möglichen Werte von a, b, c, d.

(vi) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aus $M(2 \times 2; \mathbb{R})$ sind ähnlich.

Aufgabe 12.2 [2+2 Punkte]

Es sei K ein beliebiger Körper und $a, b, c, d \in K$. Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von den Parametern.}$$

Aufgabe 12.3 [2+3+1 Punkte]

Betrachten Sie die Determinantenabbildung eingeschränkt auf invertierbare Matrizen; $\det\colon GL_n(K) \to K$.

a) Zeigen Sie, dass det ein Homomorphismus ist zwischen den Gruppen $GL_n(K)$ und $(K\backslash\{0\}, \cdot)$. Ist det surjektiv?

Der Kern der Determinantenabbildung $\det\colon GL_n(K) \to K\backslash\{0\}$ heißt *spezielle lineare Gruppe* und wird mit $SL_n(K)$ bezeichnet. Für eine Gruppe G ist das *Zentrum von* G definiert als

$$Z(G) := \{h \in G | gh = hg \; \forall\, g \in G\}.$$

b) Bestimmen Sie das Zentrum der Gruppe $GL_n(K)$ für beliebige Körper K und alle $n \geqslant 2$.

c) Was ergibt sich aus b) für das Zentrum der Gruppe $SL_n(K)$?

Aufgabe 12.4 [1+1+1 Punkte]

Es sei $\mathcal{X} := \{A \in M(3 \times 3; \mathbb{R}) | A^t = -A\}$.

1. Wie sehen Matrizen in $\mathcal{X}$ aus?
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Welche Dimension hat er?
3. Was ist $\det(A)$ für $A \in \mathcal{X}$?

Aufgabe 12.5 [3 Punkte]

Ein berühmtes, wichtiges Beispiel ist die *Vandermondesche Determinante*. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j<i} (x_i - x_j).$$