Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, 15. Januar 2020, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 11.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Es sei $\mathbb{P}$ das Prisma, das als Grundfläche das Dreieck hat, das von den Vektoren $\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ aufgespannt ist und das durch Parallelverschiebung durch den Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ gegeben ist. Weiterhin sei P das Parallelogram, welches von den Vektoren $\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ aufgespannt ist.

(i) Das Volumen des Prismas $\mathbb{P}$ ist gleich 8.

(ii) Das Volumen des Prismas $\mathbb{P}$ ist gleich 4.

(iii) Der Flächeninhalt des Parallelogram P ist $\leqslant 10$.

(iv) Der Flächeninhalt des Parallelogram P ist > 10.

(v) Der Vektor $\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$ steht sowohl auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ als auch auf $\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ senkrecht.

(vi) Für Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt, dass (u, v, w) genau dann eine linear unabhängige Familie von Vektoren ist, wenn $(u \times v, v \times w, w \times u)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 11.2 [3 Punkte]

Es sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-Vektorräumen und W sei ein beliebiger K-Vektorraum. Betrachten Sie den Produktvektorraum $\prod_{i\in I} V_i$ und die kanonischen Epimorphismen $\mathrm{pr}_j \colon \prod_{i\in I} V_i \longrightarrow$

V_j für $j \in I$, die durch die Projektion auf die j-te Komponente gegeben sind. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(W, \prod_{i\in I} V_i) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_K(W, V_i); \quad f \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ f)_{i\in I}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

Aufgabe 11.3 [3+3+1 Punkte]

a) Ist eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{K})$ immer invertierbar? Wenn ja: Wie sieht die inverse Matrix aus? (Hinweis: Schreiben Sie die Matrix in der Form $E_4 + X$.)

b) Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus, um zu testen, ob die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$ invertierbar ist.

c) Wenn Sie die Einträge der obigen Matrix modulo zwei betrachten, ist die resultierende Matrix in $M(4 \times 4, \mathbb{F}_2)$ dann invertierbar?

Aufgabe 11.4 [2 Punkte]

Beweisen Sie die sogenannte Graßmann-Identität: Für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$

Hierbei bezeichnet $\langle u, w\rangle$ das Standard-Skalarprodukt.

Aufgabe 11.5 [3 Punkte]

Es sei K ein Körper. Ein endlicher Kettenkomplex C_* besteht aus K-Vektorräumen C_i zusammen mit K-linearen Abbildungen

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

so dass $d_i \circ d_{i+1} = 0$. Das Bild von d_{i+1} ist also im Kern von d_i enthalten. Der Quotientenvektorraum

$$H_i(C_*) := \ker(d_i)/\mathrm{Bild}(d_{i+1})$$

heißt die *i-te Homologiegruppe des Kettenkomplexes C_**. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{dim}_K C_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{dim}_K H_i(C_*)$$

gilt, falls alle Vektorräume C_i endlich-dimensional sind. Die obige Summe ist die sogenannte *Euler-Charakteristik*: `https://de.wikipedia.org/wiki/Euler-Charakteristik`