Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, 8. Januar 2020, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 10.1 [6 Punkte]
Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Der Rang von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist 0.

(ii) Eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, falls $ad - cb \neq 0$.

(iii) Ein $X \in M(n \times n; K)$ mit $n > 0$ ist genau dann invertierbar, falls der Rang von X n ist.

(iv) Für ein $X \in M(m \times n; K)$ mit $m \leqslant n$ gilt immer, dass $m \leqslant \mathrm{rg}(X) \leqslant n$.

(v) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ sind äquivalent.

(vi) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ können nicht äquivalent sein.

Aufgabe 10.2 [3 Punkte]
Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Körper K eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ genau dann äquivalent ist zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wenn $\mathrm{rg}(A) = r$ gilt. Hierbei stehen die Nullen für Nullmatrizen des passenden Formats.

Aufgabe 10.3 [2+2 Punkte]
Es sei K ein Körper mit p Elementen, wobei p eine Primzahl ist.

a) Es sei $A \in M(3 \times 2, K)$ mit $rg(A) = 1$. Wie viele Elemente hat dann die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$?

b) Es sei $A \in M(2 \times 3, K)$ mit $rg(A) = 2$. Wie viele Elemente hat dann die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$?

Aufgabe 10.4 [2+3 Punkte]

a) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension $0 < n < \infty$ über einem beliebigen Körper K. Gegeben seien Endomorphismen $f, g \colon V \to V$, für die gilt, dass $f + g$ ein Automorphismus ist und $f \circ g = 0$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

b) Es seien $A \in M(\ell \times m, K)$ und $B \in M(m \times n, K)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - m \leqslant \mathrm{rg}(A \cdot B) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$$

gilt.

Aufgabe 10.5 [3 Punkte]

Es sei U der Untervektorraum des $\mathbb{F}_2^3$, der von den Vektoren $\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Geben Sie eine Basis des Quotientenvektorraums $\mathbb{F}_2^3/U$ an.