Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Blatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 23. Oktober 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 1.1 [6 Punkte]
Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Seien X und Y Mengen. Es gilt $X \setminus (X \setminus Y) = Y$.

(ii) Seien A, B und C Mengen. Es gilt die Äquivalenz

$$A \subseteq (B \cap C) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C).$$

(iii) Auf einer Menge mit genau zwei Elementen gibt es genau 16 verschiedene Relationen.

(iv) Auf einer Menge mit genau zwei Elementen gibt es genau 4 verschiedene Relationen.

(v) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 2\}$ beschreibt eine Äquivalenzrelation.

(vi) Die Menge $\{a, b\}$ ist eine Teilmenge der Menge $\{\{a, b\}, c, d\}$.

Aufgabe 1.2 [1+2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Relationen auf einer Menge mit drei Elementen.

(b) Wie viele davon sind symmetrisch? Wie viele davon sind reflexiv?

Aufgabe 1.3 [1+1+1 Punkte]
Es seien A und B Aussagen.

(a) Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen

$$A \Rightarrow B$$

und

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

durch das Aufstellen der entsprechenden Wahrheitswerttabellen.

(b) Was ist die logische Verneinung der Aussage *Die Zahl* 36 *ist nicht durch* 6 *teilbar und* 36 *ist keine Quadratzahl*?

(c) Modellieren Sie das *exklusive Oder* durch die Standardoperatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.

Aufgabe 1.4 [2+2 Punkte]

(a) Formulieren und beweisen Sie das Prinzip der Doppelinduktion, d.h. ein Kriterium dafür, dass eine Aussage $B_{n,m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gültig ist.

(b) Benutzen Sie dieses Prinzip, um zu zeigen, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n : a_1 + \ldots + a_n = k\}$$

genau $\binom{k+n-1}{n-1}$ Elemente besitzt.

Aufgabe 1.5 [1+1+1 Punkte]
Es seien X, Y, Z und T Mengen.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die Identität $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$.

(b) Beweisen Sie, dass aus $X \times Z \subset Y \times T$ und $X \times Z \neq \varnothing$ folgt, dass $X \subset Y$ und $Z \subset T$. (Warum ist die Zusatzbedingung $X \times Z \neq \varnothing$ nötig?)

(c) Finden Sie eine Formel für

$$(X \setminus Y) \times Z.$$