Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Blatt 0

Präsenzübungsblatt zur Besprechung in den Übungen am 21. und 22 Oktober.

Aufgabe 0.1

Wir betrachten die Mengen

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 25\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot y > 5\}, \quad Z = \{5, 6, 7\}.$$

Geben Sie folgende Mengen an:

(i) $\mathcal{P}(Z)$

(ii) $X \cup Y$, $X \cap Y$, $Y \setminus Z$

(iii) $(X \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ und $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

(iv) $(X \setminus Y) \times (Z \setminus X)$

Aufgabe 0.2

Seien A, B und C Aussagen. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen:

(a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

Aufgabe 0.3

Erklären Sie den Fehler im vermeintlichen Beweis der Aussage 'Alle Kühe haben dieselbe Farbe'.

Beweis. Induktion über die Anzahl der Kühe. Genauer 'beweisen' wir für $n \in \mathbb{N}$ induktiv die Aussage

$$A(n) = \text{“Alle Kühe in einer } n\text{-elementigen Menge von Kühen haben dieselbe Farbe“}.$$

Induktionsanfang ($n = 1$): Offensichtlich haben alle Kühe in einer einelementigen Menge dieselbe Farbe.

Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, daß bereits in jeder Menge von n Kühen alle Kühe dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n + 1$ Kühen. Durch Aussondern einer Kuh erhalten wir eine Menge von n Kühen, die – aufgrund der Induktionsvoraussetzung – alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir die ausgesonderte Kuh wieder hinzu und nehmen eine andere Kuh heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Kühe dieselbe Farbe. Die ursprünglich herausgenommene Kuh hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Kühe in der Gruppe. Daher müssen alle $n+1$ Kühe dieselbe Farbe besitzen.

Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Kühen nur Kühe derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Kühe dieselbe Farbe haben □

Aufgabe 0.4

Wir betrachten zwei Abbildungen

$$A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}\,, \qquad B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Es sei $p = (1, \frac{3}{2})$ und $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $A(x) = p$. Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ mit $B(x) = p$, und beschreiben Sie jeweils die Geometrie der Gesamtheit dieser Vektoren.

(b) Welche Elemente $x \in \mathbb{R}^2$ werden von A auf q abgebildet? Welche von B?