Zweite Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie I und II

Wintersemester 2012/13 und Sommersemester 2013

Prof. Dr. Birgit Richter

02.10.2013

Schreiben Sie Ihre Antworten bitte entweder direkt unter die Aufgabe oder auf Zettel, die Sie an den Klausurbogen heften. Notieren Sie bitte die Nummern der Fragen zu den jeweiligen Antworten.

Name:	
Matrikelnummer:	
Geburtsdatum und -ort	

Studiengang:

☐ Bachelor Mathematik ☐ Bachelor Wirtschaftsmathematik

☐ Bachelor Lehramt an Gymnasien ☐ Bachelor Lehramt an Beruflichen Schulen

☐ Physik ☐ Sonstiges:

Die Tabelle füllen wir für Sie aus.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

Gutes Gelingen!

(1) In dieser Aufgabe kreuzen Sie bitte nur die Antworten an, die Sie für richtig halten. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) Es seien U, V und W K-Vektorräume mit $\dim_K(U) = 2$, $\dim_K(V) = 5$ und $\dim_K(W) = 3$. Es sei U ein Untervektorraum von V. Kreuzen Sie korrekte Dimension an.

$\dim_K(V/U) =$	☐ 2	☐ 3	☐ 5	☐ 7
$\dim_K(V \oplus W) =$	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 8
$\dim_K(V \otimes W) =$	☐ 3	☐ 5	☐ 8	☐ 15

1+1+1 Punkte

b) Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in GL_8(\mathbb{C}).$$

Dann ist das Minimalpolynom von A gleich

☐$(X-i)(X-\sqrt{2})$ ☐$(X-i)^3(X-\sqrt{2})^5$ ☐$(X-i)^3(X-\sqrt{2})^2$ ☐$(X-\sqrt{2})^4(X-i)^3$.

1 Punkt

c) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 2i \\ 3i & 0 & 4i & 5i \\ 9i & 0 & 11i & 13i \end{pmatrix}$ ist

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4.

1 Punkt

d) Es sei $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_3 - iz_2$.

Dann hat der Kern von f die Dimension

☐0 ☐1 ☐2 ☐3. 1 Punkt

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^3.$$

Elemente des $\mathbb{R}^3$ schreiben wir als $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Elemente des $\mathbb{R}^2$ notieren wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung f_1 sei die Inklusion $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_2 strecke die x_1-Achse mit dem Faktor π und spiegele die (x_2, x_3)-Ebene an der dortigen Ursprungsgeraden mit Steigungswinkel $\theta \in [0, \pi)$.
Es sei $S_1 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $S_2 = (e_1, e_2, e_3)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
a) Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.
b) Berechnen Sie die Determinante von f_2.

3 +1 Punkte

(3) Untersuchen Sie das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & & = 1 \\ 3x_1 & +9x_2 & +10x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 0 \\ & 2x_2 & +7x_3 & +3x_4 & -x_5 & = 3 \\ 2x_1 & +8x_2 & +12x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 1 \end{array}$$

mit Hilfe des Gaußalgorithmus auf Lösbarkeit.

2 Punkte

(4) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum über einem beliebigen Körper K und U_1, U_2 seien Untervektorräume von V. Formulieren und beweisen Sie die Dimensionsformel für $\dim_K(U_1 + U_2)$.

1 Punkt für die korrekte Antwort, 3 Punkte für einen richtigen Beweis.

(5) Es sei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit fünf Elementen $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.
a) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}$ invertierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort mittels eines Determinantenkriteriums.
b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von C.

1+2 Punkte

(6) Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $f \colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung und f^* sei die zu f duale Abbildung. Beweisen Sie, dass gilt: $\mathrm{Bild}(f^*) = (\ker(f))^0$.

2 Punkte

(7) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U sei ein Untervektorraum von V.

a) Definieren Sie, was der Quotientenvektorraum V/U ist: Geben Sie dazu die Menge V/U an und definieren Sie die Vektorraumstruktur auf V/U. Sie müssen nicht zeigen, dass diese wohldefiniert ist.

b) Es sei $f\colon V \to W$. Leiten Sie her, wann eine Faktorisierung von f über V/U existiert, d. h. wann eine lineare Abbildung $\bar{f}\colon V/U \to W$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f = \bar{f} \circ \pi$ gilt. Hierbei bezeichnet π die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/U$.

1 + 2 Punkte

(8) Es sei B die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von B ist $-(X-2)^3$. Bestimmen Sie die Jordannormalform von B. Berechnen Sie *nicht* die Basiswechselmatrizen sondern leiten Sie lediglich her, wie die Jordannormalform von B aussehen muss.

2 Punkte

(9) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & (\frac{2}{9}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i) \\ 0 & -1 & 0 \\ (\frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}i) & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{C}).$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix unitär ist.

b) Das charakteristische Polynom der Matrix ist $-(X+1)^2(X-1)$. Bestimmen Sie eine ON-Basis aus Eigenvektoren.

1 + 3 Punkte

(10) Orthonormalisieren Sie die Familie von Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^4$.

2 Punkte.

(11) Es sei V ein unitärer endlich-dimensionaler Vektorraum und f sei ein Endomorphismus von V.

a) Wann nennt man f selbstadjungiert?

b) Wie ist die zu f adjungierte Abbildung, f^{ad}, definiert?

c) Beweisen Sie, dass V eine ON-Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von f besteht, falls f selbstadjungiert ist .

1 + 1 + 3 Punkte