Erste Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie I und II

Wintersemester 2012/13 und Sommersemester 2013

Prof. Dr. Birgit Richter

17.07.2013

Schreiben Sie Ihre Antworten bitte entweder direkt unter die Aufgabe oder auf Zettel, die Sie an den Klausurbogen heften. Notieren Sie bitte die Nummern der Fragen zu den jeweiligen Antworten.

Name:	
Matrikelnummer:	
Geburtsdatum und -ort	

Studiengang:

☐ Bachelor Mathematik ☐ Bachelor Wirtschaftsmathematik

☐ Bachelor Lehramt an Gymnasien ☐ Bachelor Lehramt an Beruflichen Schulen

☐ Physik ☐ Sonstiges:

Die Tabelle füllen wir für Sie aus.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

Gutes Gelingen!

(1) In dieser Aufgabe kreuzen Sie bitte nur die Antworten an, die Sie für richtig halten. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) Es seien A und B beliebige $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K und $\lambda \in K$. Nehmen Sie an, dass die Matrizen invertierbar sind, falls ein $(-)^{-1}$ in der Formel auftaucht. Dann gilt immer

$(AB)^{-1} =$	☐ $B^{-1}A^{-1}$	☐ $A^{-1}B^{-1}$	☐ $(BA)^{-1}$
$\mathrm{tr}(AB) =$	☐ $\mathrm{tr}(BA)$	☐ $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$	☐ $\mathrm{tr}(B^{-1}A^{-1})$
$\det(\lambda A) =$	☐ $\lambda^{n^2}\det(A)$	☐ $\lambda\det(A)$	☐ $\lambda^{n}\det(A)$

1+1+1 Punkte

b) Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_8(\mathbb{C}).$$

Dann ist das Minimalpolynom von A gleich

☐$(X-i)(X-2)$ ☐$(X-2)(X-i)^3$ ☐$(X-i)^5(X-2)^3$ ☐$(X-2)^2(X-i)^3$.

1 Punkt

c) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist

☐0 ☐1 ☐2 ☐3.

1 Punkt

d) Es sei $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 - iz_2 \end{pmatrix}$. Dann hat der Kern von f die Dimension

☐0 ☐1 ☐2 ☐3. 1 Punkt

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^3.$$

Elemente des $\mathbb{R}^3$ schreiben wir als $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Elemente des $\mathbb{R}^2$ notieren wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung f_1 sei die Inklusion $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_2 strecke die x_2-Achse mit dem Faktor $\sqrt{5}$ und drehe die (x_1, x_3)-Ebene um den Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$. Es sei $S_1 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $S_2 = (e_1, e_2, e_3)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.

b) Was ist die Determinante von f_2?

3 +1 Punkte

(3) Es sei $S = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{Q}^3$ und $\mathcal{B}$ sei die Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Stellen Sie die Transformationsmatrix $T^S_{\mathcal{B}} = M^S_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3})$ auf.

2 Punkte

(4) Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K und $f \colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Formulieren und beweisen Sie die Dimensionsformel.

1 Punkt für die korrekte Antwort, 2 Punkte für einen richtigen Beweis.

(5) Es sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

a) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ invertierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort mittels eines Determinantenkriteriums.

b) Ist $\bar{0}$ ein Eigenwert von C? Begründen Sie Ihre Antwort!

1+1 Punkte

(6) Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \colon W \to V$ sei ein Monomorphismus. Zeigen Sie, dass die zu f duale Abbildung, f^*, ein Epimorphismus ist.

2 Punkte

(7) Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und U sei ein Untervektorraum von V.

a) Definieren Sie, was das orthogonale Komplement von U in V, $U^{\perp}$, ist.

b) Zeigen Sie, dass $U^{\perp}$ ein Untervektorraum von V ist.

c) Stimmt die Dimension von $U^{\perp}$ mit der Dimension von V/U überein? Begründen Sie Ihre Antwort.

1 + 1 + 2 Punkte

(8) Es sei B die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist $-(3+X)^3$. Bestimmen Sie die Jordannormalform von B. Berechnen Sie *nicht* die Basiswechselmatrizen sondern leiten Sie lediglich her, wie die Jordannormalform von B aussehen muss.

2 Punkte

(9) Wir betrachten die symmetrische reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat charakteristisches Polynom $-X^3 + 48X - 128 = -(X-4)^2(X+8)$.

a) Diagonalisieren Sie diese Matrix bezüglich einer ON-Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie damit die Signatur der symmetrischen Bilinearform β, für die A die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis ist.

2 + 1 Punkte

(10) Orthonormalisieren Sie die Familie von Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$.

2 Punkte.

(11) Es sei V ein unitärer endlich-dimensionaler Vektorraum und f sei ein unitärer Endomorphismus. Formulieren Sie den Satz über die Normalform für solche Endomorphismen und beweisen Sie diesen.

4 Punkte