(1) In dieser Aufgabe kreuzen Sie bitte nur die Antworten an, die Sie für richtig halten. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) Es seien A und B beliebige $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K und $\lambda \in K$. Nehmen Sie an, dass die Matrizen invertierbar sind, falls ein $(-)^{-1}$ in der Formel auftaucht. Dann gilt immer

$(AB)^{-1} =$	☒ $B^{-1}A^{-1}$	☐ $A^{-1}B^{-1}$	☐ $(BA)^{-1}$
$\mathrm{tr}(AB) =$	☒ $\mathrm{tr}(BA)$	☐ $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$	☐ $\mathrm{tr}(B^{-1}A^{-1})$
$\det(\lambda A) =$	☐ $\lambda^{n^2}\det(A)$	☐ $\lambda\det(A)$	☒ $\lambda^n\det(A)$

b) Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_8(\mathbb{C}).$$

Dann ist das Minimalpolynom von A gleich

☐$(X-i)(X-2)$ ☐$(X-2)(X-i)^3$ ☐$(X-i)^5(X-2)^3$ ☒ $(X-2)^2(X-i)^3$.

c) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist

☐0 ☐1 ☒ 2 ☐3.

d) Es sei $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 - iz_2 \end{pmatrix}$. Dann hat der Kern von f die Dimension

☐0 ☒ 1 ☐2 ☐3.

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^3.$$

Elemente des $\mathbb{R}^3$ schreiben wir als $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Elemente des $\mathbb{R}^2$ notieren wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung f_1 sei die Inklusion $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_2 strecke die x_2-Achse mit dem Faktor $\sqrt{5}$ und drehe die (x_1, x_3)-Ebene um den Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$. Es sei $S_1 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $S_2 = (e_1, e_2, e_3)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.

Die Abbildung f_1 bildet e_1 auf e_1 und e_2 auf e_2 ab und daher ist

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für f_2 gilt $f_2(e_1) = (\cos\theta, 0, \sin\theta)^t$, $f_2(e_2) = (0, \sqrt{5}, 0)^t$, $f_2(e_3) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)^t$ und damit ist

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Für die Komposition f ergibt sich damit

$$M(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ \sin\theta & 0. \end{pmatrix}$$

b) Was ist die Determinante von f_2?

$$\det M(f_1) = \sqrt{5} \qquad (= \sqrt{5}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)).$$

(3) Es sei $S = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{Q}^3$ und $\mathcal{B}$ sei die Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Stellen Sie die Transformationsmatrix $T^S_{\mathcal{B}} = M^S_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3})$ auf.

Wir nennen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Dann ist $e_1 = 1/2v_1 - 1/2v_2 + 1/6v_3$, $e_2 = v_2 - 1/3v_3$ und $e_3 = 1/3v_3$ also

$$T^S_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(4) Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K und $f\colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Formulieren und beweisen Sie die Dimensionsformel.

Die Dimensionsformel lautet:

$$\dim_K V = \dim_K \mathrm{Bild}(f) + \dim_K \ker(f).$$

Beweis:

Es sei $(u_1, \ldots, u_k)$ eine Basis des Kerns von f. Wir ergänzen diese zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ von V.

Behauptung: $(f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n))$ ist eine Basis des Bilds von f.

Das System erzeugt: Ist $w = f(v)$ ein Element im Bild, so können wir v schreiben als $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$, aber $f(v) = \sum_{i_1}^n \lambda_i f(u_i) = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i f(u_i)$, weil die ersten k Vektoren im Kern liegen.

Das System ist linear unabhängig: Ist $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i f(u_i) = 0$, so ist

$$f(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i) = 0$$

das bedeutet aber, dass $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i$ ein Element des Kernes von f ist. Es gibt also Skalare $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_k$, so dass

$$\sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i = -\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$$

und dies ergibt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0.$$

Da $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ eine Basis ist, müssen dann alle λ_i trivial sein, also insbesondere auch $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.

Die Behauptung folgt dann durch Abzählen der Basiselemente.

(5) Es sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

a) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ invertierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort mittels eines Determinantenkriteriums.

Die Determinante der Matrix ist $\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$, also hat die Matrix nicht vollen Rang und ist nicht invertierbar.

b) Ist $\bar{0}$ ein Eigenwert von C? Begründen Sie Ihre Antwort!

Da die Matrix nicht invertierbar ist, hat die Multiplikation mit C als lineare Abbildung auf dem $\mathbb{F}_3^3$ einen nicht-trivialen Kern. Es sei v ein nicht-triviales Element im Kern. Dann gilt $Cv = 0 = \bar{0}v$, also ist $\bar{0}$ ein Eigenwert von C mit Eigenvektor v.

(6) Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f\colon W \to V$ sei ein Monomorphismus. Zeigen Sie, dass die zu f duale Abbildung, f^*, ein Epimorphismus ist.

Die duale Abbildung $f^*\colon V^* \to W^*$ ist definiert als $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ für $\varphi \in V^*$. Es sei ψ ein beliebiges Element in W^* und $(w_1, \ldots, w_m)$ sei eine Basis von W. Dann ist ψ durch die Werte auf $(w_1, \ldots, w_m)$ eindeutig definiert, also durch $a_i := \psi(w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Da f ein Monomorphismus ist, ist $(f(w_1), \ldots, f(w_m))$ linear unabhängig in V. Wir ergänzen dies zu einer Basis $(f(w_1), \ldots, f(w_m), v_{m+1}, \ldots, v_n)$ von V.

Wir definieren ein Funktional $\varphi\colon V \to K$ als

$$\varphi(f(w_i)) = a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad \varphi(v_k) = 0,\ m+1 \leqslant k \leqslant n.$$

Dann ist $\psi(w_i) = a_i = \varphi(f(w_i))$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $\psi = f^*(\varphi)$.

(7) Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und U sei ein Untervektorraum von V.

a) Definieren Sie, was das orthogonale Komplement von U in V, $U^\perp$, ist.

Wir bezeichnen das Skalarprodukt auf V mit $\langle -, - \rangle$. Dann ist

$$U^\perp = \{v \in V | \langle v, u \rangle = 0 \,\forall\, u \in U\}.$$

b) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum von V ist.

Da $\langle 0, u \rangle = 0$ gilt für alle $u \in U$, ist der Nullvektor in $U^\perp$, insbesondere ist $U^\perp$ nicht leer.

Sind v_1, v_2 aus $U^\perp$ und λ_1, λ_2 aus dem Körper, so ist auch

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u \rangle = \lambda_1 \langle v_1, u \rangle + \lambda_2 \langle v_2, u \rangle = 0 + 0 = 0$$

für alle $u \in U$ und somit ist auch $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U^\perp$.

c) Stimmt die Dimension von $U^\perp$ mit der Dimension von V/U überein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja: Die Dimension von $U^\perp$ ist $\dim_K U^\perp = \dim_K V - \dim_K U$ und dies ist ebenfalls die Dimension des Quotientenvektorraums $\dim_K V/U = \dim_K V - \dim_K U$.

(8) Es sei B die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist $-(3+X)^3$. Bestimmen Sie die Jordannormalform von B. Berechnen Sie *nicht* die Basiswechselmatrizen sondern leiten Sie lediglich her, wie die Jordannormalform von B aussehen muss.

Die Matrix $B + 3E_3$ ist

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 1 (die erste und zweite Spalte sind Vielfache der letzten Spalte).

A priori kommen als Jordannormalformen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

in Frage. Da aber nur die zweite Matrix ebenfalls die Rangbedingung erfüllt, ist sie die Jordannormalform von B.

(9) Wir betrachten die symmetrische reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat charakteristisches Polynom $-X^3 + 48X - 128 = -(X-4)^2(X+8)$.

a) Diagonalisieren Sie diese Matrix bezüglich einer ON-Basis des $\mathbb{R}^3$.

Eigenvektoren v für den Eigenwert 4 müssen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

erfüllen.

Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind daher $v_1 = (1,1,0)^t$ und $v_2 = (0,0,1)^t$. Da v_2 schon normiert ist und da v_1 und v_2 orthogonal zueinander stehen, muss man nur v_1 normieren, also $\tilde{v}_1 = 1/\sqrt{2}v_1$.

Ein Eigenvektor v zum Eigenwert -8 muss

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} v = 0$$

erfüllen. Damit ist $v_3 = 1/\sqrt{2}(1,-1,0)^t$ ein normierter Eigenvektor. Dieser steht orthogonal zu den beiden ersten (das muss man nicht nachrechnen, das gilt immer).

Damit ist $(\tilde{v}_1, v_2, v_3)$ eine ON-Basis aus Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie damit die Signatur der symmetrischen Bilinearform β, für die A die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis ist.

Da A zwei positive und einen negativen Eigenwert hat, ist die Signatur $(2,1)$.

(10) Orthonormalisieren Sie die Familie von Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$.

Der erste Vektor hat Norm 3 also ist $v_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)^t$ von Norm 1. Damit ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu v_1. Seine Norm ist $\frac{1}{3}\sqrt{2}$, also ist $v_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -4/9 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$ seine Normierung und (v_1, v_2) ist die orthonormalisierte Familie.

(11) Es sei V ein unitärer endlich-dimensionaler Vektorraum und f sei ein unitärer Endomorphismus. Formulieren Sie den Satz über die Normalform für solche Endomorphismen und beweisen Sie diesen.

Der Satz besagt, dass es eine ON-Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die λ_i komplexe Eigenwerte der Norm 1.

Beweis:

- Wir wissen, dass das characteristische Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt:
$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n).$$
- Wir zeigen die Behauptung induktiv. Für $n = 1$ ist nichts zu tun, weil wir wissen, dass Eigenwerte unitärer Abbildungen immer Norm 1 haben. Ein normierter Eigenvektor ist dann eine ON-Basis.
- Es sei v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 der Norm 1 und
$$U := (\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(v_1))^{\perp}.$$
Behauptung: U erfüllt $f(U) = U$. Es sei u in U, d.h. $\langle u, v_1 \rangle = 0$. Dann ist
$$\langle fu, v_1 \rangle = \langle fu, \lambda_1^{-1} \lambda_1 v_1 \rangle = \bar{\lambda}_1^{-1} \langle fu, fv_1 \rangle = \bar{\lambda}_1^{-1} \langle u, v_1 \rangle = 0.$$
Die letzte Gleichung gilt, weil f unitär ist. ($\bar{\lambda}_1^{-1} = \lambda_1$, aber das nur am Rande...) Damit gilt also $f(U) \subset U$. Da f invertierbar ist, gilt auch $f(U) = U$.
- Die Dimension von U ist $n - 1$. Induktiv gibt es also eine ON-Basis $(v_2, \ldots, v_n)$ von U aus Eigenvektoren. Damit ist dann $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren von V.