Übungsklausur zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Birgit Richter

04.02.2013

Schreiben Sie Ihre Antworten bitte entweder direkt unter die Aufgabe oder auf Zettel, die Sie an den Klausurbogen heften. Notieren Sie bitte die Nummern der Fragen zu den jeweiligen Antworten.

Name:	
Matrikelnummer:	
Geburtsdatum und -ort	

Studiengang:

☐ Bachelor Mathematik ☐ Bachelor Wirtschaftsmathematik

☐ Bachelor Lehramt an Gymnasien ☐ Bachelor Lehramt an Beruflichen Schulen

☐ Physik ☐ Sonstiges:

Die Tabelle füllen wir für Sie aus!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

(1) In dieser Aufgabe kreuzen Sie bitte nur die Antworten an, die Sie für richtig halten. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) Es seien A und B beliebige $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K. Nehmen Sie an, dass die Matrizen invertierbar sind, falls ein $(-)^{-1}$ in der Formel auftaucht. Dann gilt immer

$(AB)^{-1} =$	☐ $B^{-1}A^{-1}$	☐ $A^{-1}B^{-1}$	☐ $(BA)^{-1}$
$(AB)^t =$	☐ A^tB^t	☐ B^tA^t	☐ $(BA)^t$
$\det(A^{-1})^t =$	☐ $\det(A^{-1})$	☐ $-\det A^{-1}$	☐ $\det A^t$

1+1+1 Punkte

b) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension 15 und $U \subset V$ ein Untervektorraum der Dimension 3. Dann gilt.

$\dim_K(V/U) =$ ☐5 ☐12 ☐15 ☐18.

1 Punkt

c) Das multiplikative Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{Q})$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{cases} \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

1 Punkt

d) Es sei $f\colon K^4 \to K$ die K-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 x_i$. Dann hat der Kern von f die Dimension

☐1 ☐2 ☐3 ☐4. 1 Punkt

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Elemente des $\mathbb{R}^3$ schreiben wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_1 strecke die x_2-Achse mit dem Faktor $\sqrt{2}$ und spiegele die (x_1, x_3)-Ebene an der x_1-Achse und f_2 sei die Projektion $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Es sei $S_1 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $S_2 = (e_1, e_2)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

a) Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.

b) Was ist die Determinante von f_1?

3 +1 Punkte

(3) Es sei $S = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des K^3 und $\mathcal{A}$ sei die Basis

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Stellen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{A}}^{S} = M_{\mathcal{A}}^{S}(\mathrm{id}_{K^3})$ auf.

2 Punkte

(4) Ist die Familie $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ linear unabhängig im $\mathbb{C}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

1 Punkt für die korrekte Antwort, 1 Punkt für die richtige Begründung

(5) Es seien V und W K-Vektorräume und $f \colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Definieren Sie, was der Kern und das Bild von f sind.

1 + 1 Punkte

(6) Es seien V und W zwei K-Vektorräume gleicher endlicher Dimension und $f \colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass f surjektiv ist, falls es injektiv ist.

2 Punkte

(7) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht der affine Lösungsraum aus? Welche Dimension hat er?

2 + 1 Punkte

(8) Betrachten Sie $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$. Geben Sie (ohne Rechnung) eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ an. Notieren Sie Elemente in $\mathbb{R}^3/U$ bitte als Äquivalenzklassen $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right]$ von Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$.

1 Punkt

(9) Es sei $K_6[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Höchstgrad 6 und K^2 sei der 2-dimensionale Standardvektorraum über K. Welche Dimension hat der K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(K_6[X], K^2)$? Beweisen Sie Ihre Antwort; dabei müssen Sie die Dimensionen von $K_6[X]$ und K^2 nur korrekt benennen.

1 Punkt für die richtige Antwort, 2 Punkt für einen korrekten Beweis.

(10) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ sei ein Untervektorraum. Beweisen Sie, dass gilt

$$V \cong U \oplus (V/U).$$

3 Punkte

(11) Benutzen Sie ein Determinantenkriterium um zu entscheiden, für welche $x \in \mathbb{Q}$ die Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \right)$$

linear unabhängig sind.

2 Punkte