Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 9 Abgabetermin: Mittwoch, 19. Dezember 2012

Aufgabe 41 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

	richtig	falsch
Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$.	☐	☐
Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.	☐	☐
Ist $A \in M(121 \times 121, \mathbb{R})$ mit $A^6 = E_{121}$ und $A^{10} = E_{121}$, dann gilt immer $A^2 = E_{121}$.	☐	☐
Ist $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = E_2$.	☐	☐
Ist $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $B^2 = 0$, so ist auch schon $B = 0$.	☐	☐
Ist $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $B^2 = E_2$, so ist $B = \pm E_2$.	☐	☐

Aufgabe 42

a) Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, die Dimension von V über K sei n und f sei bijektiv. Gibt es dann geordnete Basen $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ von V, so dass $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f) = E_n$ gilt?

b) Es sei $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel θ. Stellen Sie R_θ bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)$ dar.

1 + 2 Punkte

Aufgabe 43 Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $V_1, V_2 \subset V$, $W_1, W_2 \subset W$ seien Untervektorräume, so dass $V = V_1 \oplus V_2$ und $W_1 \oplus W_2 = W$. Nehmen Sie an, dass $\dim_K(V_i) \neq 0 \neq \dim_K(W_i)$, $i = 1, 2$. Es sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung, die $f(V_i) \subset W_i$ erfüllt für $i = 1, 2$.

Zeigen Sie, dass es geordnete Basen von V und W gibt, so dass die darstellende Matrix von f bezüglich dieser Basen von der Form

$$\begin{pmatrix}A & 0\\0 & B\end{pmatrix}$$

ist, wobei A, B selbst Matrizen sind ($A \in M(\dim_K W_1 \times \dim_K V_1, K)$, $B \in M(\dim_K W_2 \times \dim_K V_2, K)$), und 0 für eine Nullmatrix eines passenden Formats steht. Man sagt, dass eine solche Matrix blockdiagonal ist.

2 Punkte

Aufgabe 44

a) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

b) Nehmen Sie an, dass B die darstellende Matrix $B = M(f)$ einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung f ist. Für welche n, m ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und welchen Rang hat f?

c) Berechnen Sie C^m für $m \in \mathbb{N}_0$, wobei $C = (c_{ij}) \in M(n \times n, K)$ mit $n \geqslant 2$ und

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1. \end{cases}$$

(Hinweis: Überlegen Sie sich die Fälle $n = 2, 3$ zuerst und beweisen Sie dann den allgemeinen Fall.)

1+2+3 Punkte

Aufgabe 45 Beweisen Sie, dass die folgende Menge von Matrizen eine zur symmetrischen Gruppe Σ_3 isomorphe Untergruppe der $GL_2(\mathbb{Q})$ bildet:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3 Punkte

Name: ____