Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 8 Abgabetermin: Mittwoch, 12. Dezember 2012

Aufgabe 36 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Im Folgenden seien U_1 und U_2 endlich-dimensionale Untervektorräume eines K-Vektorraums V, B_1 sei eine Basis von U_1 und B_2 sei eine Basis von U_2.

	richtig	falsch
Die Menge $B_1 \cup B_2$ ist immer ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$.	☐	☐
Es gilt immer, dass $\lvert B_1\rvert + \lvert B_2\rvert \leqslant \dim_K(U_1 + U_2)$.	☐	☐
Die Menge $B_1 \cup B_2$ ist immer eine Basis von $U_1 + U_2$.	☐	☐
Für jedes $\lambda \in K$ ist die Abbildung $f_\lambda \colon K^2 \to K^2$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, K-linear.	☐	☐
Die komplexe Konjugation ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung auf $\mathbb{C}$.	☐	☐
Die komplexe Konjugation ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auf $\mathbb{C}$.	☐	☐

Aufgabe 37 Es seien V_1 und V_2 K-Vektorräume.

a) Beweisen Sie, dass das kartesische Produkt $V_1 \times V_2$ ein K-Vektorraum ist. Benutzen Sie hierbei als additive Verknüpfung

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$

für $v_1, v_1' \in V_1$ und $v_2, v_2' \in V_2$. Für ein $\lambda \in K$ und $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ setzen Sie

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

b) Zeigen Sie, dass $V_1' := V_1 \times \{0\}$ und $V_2' := \{0\} \times V_2$ Untervektorräume von $V_1 \times V_2$ sind und dass

$$V_1 \times V_2 \cong V_1' \oplus V_2'$$

gilt.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 38 Es seien θ und φ reelle Zahlen und R_θ, R_φ die dazugehörigen Drehungen des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Verkettung $R_\theta \circ R_\varphi$ und stellen Sie diese Abbildung wieder als Drehung um einen Winkel dar.

2 Punkte

Aufgabe 39 Es sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ein festgewählter Vektor. Betrachten Sie die Abbildung, die einem $w \in \mathbb{R}^n$ den Wert

$$\varrho_v(w) = w - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

zuordnet.

a) Ist eine solche Abbildung ϱ_v $\mathbb{R}$-linear?

b) Was ist $\varrho_v \circ \varrho_v$ und was ist $\varrho_v(\lambda v)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$?

c) Betrachten Sie für $n = 3$ den ersten kanonischen Basisvektor e_1 und beschreiben Sie die Abbildung ϱ_{e_1} geometrisch. Fertigen Sie eine Skizze an. Für welche $w \in \mathbb{R}^3$ ist $\varrho_{e_1}(w) = w$?

1+1+2 Punkte

Aufgabe 40 Es sei K ein Körper und H sei ein Untervektorraum des K^n. Beweisen Sie:

a) H ist genau dann eine Hyperebene (d.h. $\dim_K H = n - 1$), wenn es eine lineare Abbildung $\phi : K^n \to K$, $\phi \neq 0$ gibt, so dass $\ker(\phi) = H$.

b) H ist genau dann eine Hyperebene, wenn es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ gibt, so dass nicht alle λ_i null sind und so dass $H = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n | \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0\}$ gilt.

2+2 Punkte

Name: ______________________________