Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 7 Abgabetermin: Mittwoch, 5. Dezember 2012

Aufgabe 31 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Mit $\mathbb{F}_p$ für p prim bezeichnen wir wieder den Körper mit p Elementen. Ist M eine Menge und K ein Körper, so ist $\mathrm{Abb}(M, K)$ der K-Vektorraum aller Abbildungen von M nach K.

	richtig	falsch
$\mathbb{F}_2^2$ hat genau 2 verschiedene Untervektorräume der Dimension 1.	☐	☐
$\mathbb{F}_2^3$ hat genau 7 verschiedene Untervektorräume der Dimension 2.	☐	☐
In $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3)$ sind die Elemente $x \mapsto x^{4711} - \bar{2}$, $x \mapsto x^3 - \bar{1}$ und $x \mapsto x - \bar{1}$ linear unabhängig.	☐	☐
In $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die Elemente $x \mapsto x^{4711} - 2$, $x \mapsto x^3 - 1$ und $x \mapsto x - 1$ linear unabhängig.	☐	☐
In $\mathbb{F}_5[X]$ sind die Elemente $X^5 - \bar{1}$, $X^{4711} - \bar{2}$ und $X - \bar{1}$ linear unabhängig.	☐	☐
In $\mathbb{F}_3[X]$ sind die Elemente $X^3 - \bar{1}$, $X^{4711} - \bar{2}$ und $X - \bar{1}$ linear unabhängig.	☐	☐

Aufgabe 32 Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind.

a) $U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 5x_2 + x_3 = 0\}$,

b) $U_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 5x_2 + x_3 = 5\}$,

c) $U_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 + 5x_2 = 0\}$,

d) $U_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_3 = 0\}$.

e) Geben Sie für die Teilmengen aus a), b) c), d), die Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind, jeweils eine Basis an.

1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 33 Betrachten Sie im Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die folgenden Familien von Vektoren und überprüfen Sie, ob diese linear unabhängig sind.

a) $f_1(x) = \sin^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 1$.

b) $g_1(x) = \sin^2(x)$, $g_2(x) = \cos^2(x)$, $g_3(x) = \cos(2x)$.

1 + 1 Punkte

Aufgabe 34 Wir betrachten wieder den Polynomring $K[X]$ in einer Variablen über einem Körper K. Die Elemente sind $f\colon \mathbb{N}_0 \to K$, so dass $f(n) = 0$ ist für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ und wir identifizieren ein solches f wieder mit

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)X^n.$$

Wir definieren den Grad eines Polynoms $f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)X^n$ als die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $f(n) \neq 0$, falls f nicht das Nullpolynom ist. Dem Nullpolynom ordnen wir den Grad $-\infty$ zu.

Betrachten Sie die Menge

$$K[X]_n := \{f(X) \in K[X] | \mathrm{Grad}(f) \leqslant n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie, dass $K[X]_n$ ein Untervektorraum von $K[X]$ ist und bestimmen Sie seine Dimension, indem Sie eine Basis angeben. Geben Sie auch eine Basis von $K[X]$ als K-Vektorraum an.

4 Punkte

Aufgabe 35 Kann es eine abzählbare Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum geben? 3 Punkte

Name: ______________________________