Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 6 Abgabetermin: Mittwoch, 28. November 2012

Aufgabe 26 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Im Folgenden sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen der reellen Zahlen auf sich. Eine Abbildung heißt *beschränkt*, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, mit $|f(x)| \leqslant M$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

	richtig	falsch
Die Menge aller $f \in V$ mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von V.	☐	☐
Die Menge aller beschränkten $f \in V$ ist ein Untervektorraum von V.	☐	☐
Die Vektoren des $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.	☐	☐
Die Vektoren des $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.	☐	☐
Es gibt einen Vektorraum W, so dass $M = W$ eine Basis ist.	☐	☐
Für jeden Vektorraum W ist die Menge $M = W$ ein Erzeugendensystem.	☐	☐

Aufgabe 27 Geben Sie jeweils entweder einen Beweis an oder ein Gegenbeispiel (mit Begründung natürlich). Es sei V ein K-Vektorraum und $u, v, w \in V$.

a) Falls (u, v), (u, w), (v, w) jeweils linear unabhängig sind, ist dann auch die Familie (u, v, w) linear unabhängig?

b) Falls die Familie (u, v, w) linear unabhängig ist, ist dann auch die Familie $(u + v + w, v + w, w)$ linear unabhängig?

1 + 2 Punkte

Aufgabe 28 Es sei K ein beliebiger Körper und $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$. Wir betrachten die Teilmenge $P \subset V$ aller $f : \mathbb{N}_0 \to K$, so dass $f(n) = 0$ ist für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, dass P ein Untervektorraum von V ist.

b) Beweisen Sie, dass P ein kommutativer Ring mit 1 ist. Benutzen Sie dazu die multiplikative Verknüpfung

$$(f \cdot g)(n) := \sum_{i+j=n} f(i) \cdot g(j).$$

Es sei X eine Variable. Identifiziert man ein $f \in P$ mit

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) X^n,$$

so ist die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)X^n$ endlich. Die Elemente in P nennen wir *Polynome* und wir benutzen die Bezeichnung $K[X]$ für P und nennen diesen Ring den *Polynomring in einer Variablen über K*.

Ist $x \in K$ und $p \in K[X]$ mit $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$, so sei $p(x) \in K$ gleich $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Es sei W der K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(K, K)$ und P' die Menge aller polynomialen Abbildungen

$$P' := \{f \in W | \exists p(X) \in K[X] : p(x) = f(x) \quad \forall x \in K\}.$$

c) Finden Sie je ein Beispiel eines Polynoms $q_p(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ (für jede Primzahl p), so dass q_p nicht der Nullvektor in P ist, aber die durch q_p definierte polynomiale Abbildung jeweils die Nullabbildung ist.

1 + 2 + 2 Punkte

Aufgabe 29 Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Untervektorräumen $U_1, U_2, U_3 \subset V$.

a) Beweisen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

b) Kann man aus der Tatsache, dass $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ein Untervektorraum von V ist, schließen, dass dann immer $U_1 \subset (U_2 \cup U_3)$ oder $U_2 \subset (U_1 \cup U_3)$ oder $U_3 \subset (U_1 \cup U_2)$ gilt? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 30 Wie viele verschiedene ungeordnete Basen hat $\mathbb{F}_2^3$?

2 Punkte

Name: ____