Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 21. November 2012

Aufgabe 21 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen **halben** Punkt, für jeden Fehler einen **halben** Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\bar{z}$ das komplex konjugierte Element. Für $x \in \mathbb{Z}$ und gewähltes $m \in \mathbb{N}$ ist $\bar{x}$ dagegen die Restklasse von x modulo m.

	richtig	falsch
Die Abbildung $\bar{x} \mapsto \bar{x}^2 = \bar{x} \cdot \bar{x}$ ist surjektiv als Abbildung von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ auf sich.	☐	☐
Die Abbildung $\bar{x} \mapsto \bar{x}^3$ ist bijektiv als Abbildung von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auf sich.	☐	☐
Der Ring $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$ ist ein Körper.	☐	☐
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\lvert z\rvert = 1$ ist $z^{-1} = \bar{z}$.	☐	☐
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Re}(z - \bar{z}) = \lvert z\rvert$.	☐	☐
Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Im}(z + \bar{z}) = 0$.	☐	☐

Aufgabe 22

a) Es sei K ein Körper mit 4 Elementen. Einen solchen Körper gibt es. Seine Existenz können Sie für diese Aufgabe annehmen.

Es sei $K = \{0, 1, a, b\}$. Stellen Sie die Multiplikationstabelle für K auf. Was ist $1 + 1$ in K?

b) Es sei M eine beliebige aber nichtleere Menge und R ein nullteilerfreier Ring. Geben Sie ein Kriterium in Abhängigkeit von der Menge M dafür an, dass der Ring aller Abbildungen $\mathrm{Abb}(M, R)$ nicht nullteilerfrei ist.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 23

a) Bestimmen Sie jeweils das Argument und den Betrag der komplexen Zahlen $\sqrt{3}$, $-i$, $1+i$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und

$$z = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n}).$$

Fertigen Sie eine Skizze für $n = 3, 4, 6$ an.

c) Berechnen Sie z^m für alle $m \in \mathbb{Z}$.

d) Es sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Steht dann z aufgefasst als Vektor im $\mathbb{R}^2$ senkrecht auf $i \cdot z$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 + 1 + 2 + 1 Punkte

Aufgabe 24 Es sei p eine Primzahl. Berechnen Sie für alle $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$(\bar{a} + \bar{b})^p.$$

2 Punkte

Aufgabe 25 Beweisen Sie, dass jeder endliche kommutative nullteilerfreie Ring mit Eins ein Körper ist.

2 Punkte

Name: ____________________