Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 4 Abgabetermin: Mittwoch, 14. November 2012

Aufgabe 16 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

	richtig	falsch
Es sei $f\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\ker(f) \subset G$ immer eine abelsche Untergruppe von G.	☐	☐
Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \| x > 0\}$ mit der Multiplikation in $\mathbb{Q}$ ist eine Gruppe.	☐	☐
Ist G nicht abelsch, so auch jede Untergruppe H von G.	☐	☐
Die Gruppe Σ_3 ist abelsch.	☐	☐
Ist $f\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt für alle $h \in \ker(f)$ und $g \in G$, dass $g \cdot h \cdot g^{-1} \in \ker(f)$.	☐	☐
Ist $f\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und ist G abelsch, dann ist auch $\mathrm{Bild}(f) \subset G'$ abelsch.	☐	☐

Aufgabe 17

a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge. Beweisen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn H nicht leer ist und es gilt, dass

$$h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2^{-1} \in H.$$

b) Es sei $X = \{a, b, c\}$ eine Menge und die Mächtigkeit von X sei 3. Welche Gruppenstrukturen kann es auf der Menge X geben? D.h. finden Sie Verknüpfungen auf X, die die Axiome einer Gruppe erfüllen. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

2 + 2 Punkte

Aufgabe 18 Es sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein fest gewähltes Element. Die Abbildung

$$c_g\colon G \to G,$$

die einem $h \in G$ das Gruppenelement $g \cdot h \cdot g^{-1}$ zuordnet, heißt *Konjugation mit g*.

a) Ist diese Abbildung immer ein Homomorphismus? Ist sie injektiv oder surjektiv?

b) Welche Abbildung ist c_g, falls G abelsch ist?

c) Sind g_1 und g_2 zwei Elemente aus G. Was ist dann $c_{g_1 \cdot g_2}$?

2 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 19 Zeigen Sie, dass alle Homomorphismen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ von der Form sind $f(x) = mx$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ und ein $m \in \mathbb{Z}$. (Hinweis: Betrachten Sie $f(1)$.)

2 Punkte

Aufgabe 20 Es sei R ein Ring mit Eins. Ein $r \in R$ heißt *Einheit*, falls es ein $s \in R$ gibt, so dass $s \cdot r = 1_R = r \cdot s$ gilt.

Zeigen Sie, dass die Menge aller Einheiten in R, $R^\times$, eine Gruppe ist und beschreiben Sie die Menge aller Einheiten in den Ringen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$.

3 Punkte

Name: ____