Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 3 Abgabetermin: Mittwoch, 7. November 2012

Aufgabe 11 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

	richtig	falsch
Es seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = \|y\|$. Ist dann $x - y$ immer senkrecht zu $x + y$?	☐	☐
Sind $x, y \in \mathbb{R}^2$. Gilt dann immer $d(x, y) \geqslant \|x\| + \|y\|$?	☐	☐
Zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \neq y$ und $\langle x, y \rangle = 0$.	☐	☐
Zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \neq y$ und $\langle x, y \rangle = 0$.	☐	☐
Es sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Folgt dann aus $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ für $y, z \in \mathbb{R}^2$ immer, dass $y = z$?	☐	☐
Es gibt $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ und $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$.	☐	☐

Aufgabe 12 Beweisen Sie, dass es für jede Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ und je zwei $x, y \in G$ mit $x \neq y$ genau ein $z \in G$ gibt mit $d(x, z) = d(z, y)$. Zeigen Sie weiterhin, dass dieses z gleich $\frac{1}{2}(x + y)$ ist und dass $d(x, z) = \frac{1}{2}d(x, y) = d(z, y)$ gilt.

2 Punkte

Aufgabe 13 Es seien G und G' zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geqslant 2$. Beweisen Sie, dass immer einer der folgenden Fälle vorliegt:

a) G und G' schneiden sich genau in einem Punkt, oder
b) G und G' haben leeren Schnitt, oder
c) $G = G'$.
Was passiert im $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$?

3 Punkte

Wir nennen zwei Geraden $G_{p,v}, G_{q,w}$ *parallel*, falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt, so dass $w = \lambda v$ gilt. (Der Fall, dass sie übereinstimmen, ist nicht ausgeschlossen.) Gibt es Geraden im $\mathbb{R}^3$, die sich weder schneiden, noch übereinstimmen, noch parallel sind? Geben Sie entweder ein Beispiel für ein Paar solcher Geraden oder beweisen Sie, dass es ein solches Paar nicht geben kann.

2 Punkte

Aufgabe 14 Beweisen Sie unter Benutzung des euklidischen Abstands den **Kosinussatz**: Dieser besagt, dass in einem nicht-ausgearteten Dreieck (x, y, z) für den Winkel θ an x gilt, dass

$$d(y, z)^2 = d(x, y)^2 + d(x, z)^2 - 2d(x, y)d(x, z)\cos(\theta).$$

Sie wissen aus der Vorlesung, dass θ der Winkel zwischen $y - x$ und $z - x$ ist und wie Sie ihn berechnen. Leiten Sie den Satz des Pythagoras aus dem Kosinussatz her.

2 Punkte

Aufgabe 15 Betrachten Sie auf dem $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die folgende Relation: $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $x = \lambda y$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}P^2$ die Menge der Äquivalenzklassen. Leiten Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}P^2$ und der Menge der Geraden durch 0 im $\mathbb{R}^3$ her. ($\mathbb{R}P^2$ heisst die reell-projektive Ebene.)

c) Es sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit $0 \notin E$. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $f\colon E \to \mathbb{R}P^2$.

1+2+1 Punkte

Name: ________________________________