Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 13 Bonusblatt, Abgabetermin: Mittwoch, 30. Januar 2013

Aufgabe 61 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Es sei $f\colon K^3 \to K^2$ die lineare Abbildung, die bestimmt ist, durch die Werte $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = f(e_3) = e_2$ und es sei $i\colon K^2 \to K^3$ die Inklusionsabbildung, also $i(e_i) = e_i$ für $i = 1, 2$.

	richtig	falsch
Die Abbildung $f \circ i$ hat Determinante 1.	☐	☐
Die Abbildung $i \circ f$ hat Determinante 1.	☐	☐
Die Matrizen $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ in $M(3\times 3;\mathbb{Q})$ haben übereinstimmende Determinanten.	☐	☐
Es ist $\det\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix} = \pm\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ für alle möglichen Werte von a, b, c, d.	☐	☐
Es ist $\det\begin{pmatrix}b&a\\c&d\end{pmatrix} = \pm\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ für alle möglichen Werte von a, b, c, d.	☐	☐
Die Matrizen $\begin{pmatrix}4&6\\5&1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}25&3\\0&-1\end{pmatrix}$ aus $M(2\times 2;\mathbb{R})$ sind ähnlich.	☐	☐

Aufgabe 62 Es sei K ein beliebiger Körper und $a, b, c, d \in K$. Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1+a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1+c\end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von den Parametern.}$$

2+1 Punkte

Aufgabe 63 Betrachten Sie die Determinantenabbildung eingeschränkt auf invertierbare Matrizen; $\det\colon GL_n(K) \to K$.

a) Zeigen Sie, dass det ein Homomorphismus ist zwischen den Gruppen $GL_n(K)$ und $(K\backslash\{0\}, \cdot)$. Ist det surjektiv?

Der Kern der Determinantenabbildung $\det\colon GL_n(K) \to K\backslash\{0\}$ heißt *spezielle lineare Gruppe* und wird mit $SL_n(K)$ bezeichnet. Für eine Gruppe G ist das *Zentrum von G* definiert als

$$Z(G) := \{h \in G | gh = hg \,\forall g \in G\}.$$

b) Bestimmen Sie das Zentrum der Gruppe $GL_n(K)$ für beliebige Körper K und alle $n \geqslant 2$. Was ergibt sich daraus für das Zentrum der Gruppe $SL_n(K)$?

2 + 3 Punkte

Aufgabe 64 Es sei $\mathcal{X} := \{A \in M(3\times 3;\mathbb{R}) | A^t = -A\}$. Wie sehen Matrizen in $\mathcal{X}$ aus? Ist $\mathcal{X}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum? Wenn ja: Welche Dimension hat er? Was ist $\det(A)$ für $A \in \mathcal{X}$? 3 Punkte

Aufgabe 65 Ein berühmtes, wichtiges Beispiel ist die *Vandermondesche Determinante*. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\dots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j).$$

3 Punkte

Name: ______________________________