Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 12 Abgabetermin: Mittwoch, 23. Januar 2013

Aufgabe 56 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Es sei $\mathbb{P}$ das Prisma, das als Grundfläche das Dreieck hat, das von den Vektoren $\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ aufgespannt ist und das durch Parallelverschiebung durch den Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ gegeben ist. Weiterhin sei P das Parallelogram, welches von den Vektoren $\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ aufgespannt ist.

	richtig	falsch
Das Volumen des Prismas $\mathbb{P}$ ist gleich 8.	☐	☐
Das Volumen des Prismas $\mathbb{P}$ ist gleich 4.	☐	☐
Der Flächeninhalt des Parallelogram P ist $\leqslant 10$.	☐	☐
Der Flächeninhalt des Parallelogram P ist > 10.	☐	☐
Der Vektor $\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$ steht sowohl auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ als auch auf $\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ senkrecht.	☐	☐
Für Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt, dass (u, v, w) genau dann eine linear unabhängige Familie von Vektoren ist, wenn $(u \times v, v \times w, w \times u)$ linear unabhängig ist.	☐	☐

Aufgabe 57

Es sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von K-Vektorräumen und W sei ein beliebiger K-Vektorraum. Betrachten Sie den Produktvektorraum $\prod_{i \in I} V_i$ und die kanonischen Epimorphismen $\mathrm{pr}_j \colon \prod_{i \in I} V_i \longrightarrow V_j$ für $j \in I$ (Projektion auf die j-te Komponente). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(W, \prod_{i \in I} V_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_K(W, V_i); \quad f \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ f)_{i \in I}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

3 Punkte

Aufgabe 58

a) Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus, um zu testen, ob die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 5 & 7 & 3\\2 & 1 & 3 & 4\\2 & 4 & 2 & 4\\1 & 0 & 7 & 3\end{pmatrix} \in M(4 \times 4; \mathbb{Q})$ invertierbar ist und um gegebenenfalls die inverse Matrix zu finden.

b) Wenn Sie die Einträge der obigen Matrix modulo zwei betrachten, ist die resultierende Matrix in $M(4 \times 4; \mathbb{F}_2)$ dann invertierbar?

c) Ist die Matrix $\begin{pmatrix}i & -1 & 1\\i-1 & -1 & i+1\\i+1 & i-1 & 1-2i\end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{C})$ invertierbar?

2 + 1 + 2 Punkte

Aufgabe 59 Beweisen Sie die sogenannte Grassmann-Identität: Für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

Hierbei bezeichnet $\langle u, w \rangle$ das Standard-Skalarprodukt.

3 Punkte

Aufgabe 60 Ist eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4; \mathbb{K})$ immer invertierbar? Wenn ja: Wie sieht die inverse Matrix aus? (Hinweis: Schreiben Sie die Matrix in der Form $E_4 + X$.)

3 Punkte

Name: ____