Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 11 Abgabetermin: Mittwoch, 16. Januar 2013

Aufgabe 51 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

	richtig	falsch
Der Rang von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist 0.	☐	☐
Eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, falls $ad - cb \neq 0$.	☐	☐
Ein $X \in M(n \times n; K)$ mit $n > 0$ ist genau dann invertierbar, falls der Rang von X n ist.	☐	☐
Für ein $X \in M(m \times n; K)$ mit $m \leqslant n$ gilt immer, dass $m \leqslant \mathrm{rg}(X) \leqslant n$.	☐	☐
Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ sind äquivalent.	☐	☐
Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ können nicht äquivalent sein.	☐	☐

Aufgabe 52 Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Körper K eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ genau dann äquivalent ist zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wenn $\mathrm{rg}(A) = r$ gilt. (Hierbei stehen die Nullen für Nullmatrizen des passenden Formats.)

2 Punkte

Aufgabe 53 a) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension $0 < n < \infty$ über einem beliebigen Körper K. Gegeben seien Endomorphismen $f, g\colon V \to V$, für die gilt, dass $f + g$ ein Automorphismus ist und $f \circ g = 0$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

b) Es seien $A \in M(\ell \times m, K)$ und $B \in M(m \times n, K)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - m \leqslant \mathrm{rg}(A \cdot B) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$$

gilt.

c) Gibt es Beispiele von Matrizen A_1, A_2 und B_1, B_2 passenden Formats, so dass $\mathrm{rg}(A_1) + \mathrm{rg}(B_1) - m = \mathrm{rg}(A_1 \cdot B_1)$ bzw. $\mathrm{rg}(A_2 \cdot B_2) = \min(\mathrm{rg}(A_2), \mathrm{rg}(B_2))$ gilt?

2 + 3 + 2 Punkte

Aufgabe 54 Es sei U der Untervektorraum des $\mathbb{F}_2^3$, der von den Vektoren $\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des Quotientenvektorraums $\mathbb{F}_2^3/U$ an.

2 Punkte

Aufgabe 55 Ein endlicher Kettenkomplex C_* ist eine Folge K-linearer Abbildungen

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

so dass $d_i \circ d_{i+1} = 0$. Das Bild von d_{i+1} ist also im Kern von d_i enthalten. Der Quotientenvektorraum

$$H_i(C_*) := \ker(d_i)/\mathrm{Bild}(d_{i+1})$$

heißt die *i-te Homologiegruppe des Kettenkomplexes* C_*. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=o}^{n} (-1)^i \dim_K C_i = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \dim_K H_i(C_*)$$

gilt, falls alle Vektorräume C_i endlich-dimensional sind. Geometrische Anwendungen hat dieses Resultat z.B. über den Lefschetzschen Fixpunktsatz.

`http://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktsatz_von_Lefschetz` 3 Punkte

Name: ______________________________