Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 10 Abgabetermin: Mittwoch, 9. Januar 2013

Aufgabe 46 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jeden Fehler einen halben Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Die Matrizen $\tau(i,j) \in M(n \times n, K)$ für $i \neq j$ seien wie in der Vorlesung definiert; ebenso die Matrizen $\Delta(\lambda, 1, \ldots, 1)$ für $\lambda \in K$. Es sei $A \in M(n \times n; K)$.

	richtig	falsch
In $A \cdot \tau(i,j)$ ist die i-te Zeile von A mit der j-ten Zeile von A vertauscht.	☐	☐
Das Inverse der Matrix $\Delta(\lambda, 1, \ldots, 1)$ für $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, ist $\Delta(\lambda^{-1}, 1, \ldots, 1)$.	☐	☐
Das Inverse der Matrix $\Delta(\lambda, 1, \ldots, 1)$ für $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, ist $\Delta(-\lambda, 1, \ldots, 1)$.	☐	☐
Es sei $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Ist b eine der Spalten von A, so ist das LGS $Ax = b$ nicht lösbar.	☐	☐
Es sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 13 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Jede Lösung (x_1, x_2, x_3) der Gleichung $Ax = 0$ ist auch Lösung der Gleichung $x_1 + 15x_2 + 4x_3 = 0$.	☐	☐
Es sei $M(f) = A \in M(n \times n, K)$ und $b \in K^n$. Dann ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar, wenn $\dim_K(\ker(f)) = 0$	☐	☐

Aufgabe 47 Es sei $\mathbb{Q}_3[X]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Polynome mit Grad kleiner oder gleich 3. Betrachten Sie die formale Ableitung von Polynomen, d.h. die Abbildung $D\colon \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]$, die ein Polynom $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ auf $a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$ abbildet.

a) Betrachten Sie die geordnete Basis $B = (1, X, X^2, X^3)$ von $\mathbb{Q}_3[X]$ und stellen Sie die darstellende Matrix $M_B(D)$ der linearen Abbildung D bezüglich dieser Basis auf.

b) Gibt es eine Matrix M_1, so dass

$$M_B(D) \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist?

c) Gibt es eine Matrix M_2, so dass $M_B(D) \cdot M_2 = E_4$ ist?

1 +1 + 1 Punkte

Aufgabe 48

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 0$ und V sei ein K-Vektorraum der Dimension n. Beweisen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ mit $\ker(f) = \mathrm{Bild}(f)$ gibt, wenn n gerade ist. (Hier ist wirklich Gleichheit gemeint und nicht Isomorphie!)

2 Punkte

Aufgabe 49

a) Betrachten Sie das LGS

$$\begin{aligned} (e-1)x_1 + ex_2 + ex_3 &= 0 \\ fx_1 + (f-1)x_2 + fx_3 &= 0 \\ gx_1 + gx_2 + (g-1)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über den reellen Zahlen mit Parametern e, f und g. Welche Bedingungen müssen die Parameter e, f, g erfüllen, damit das LGS mehr als eine reelle Lösung (x_1, x_2, x_3) hat?

Es sei K ein Körper mit p Elementen, wobei p eine Primzahl ist.

b) Es sei $A \in M(3 \times 2, K)$ mit $rg(A) = 1$. Wie viele Elemente hat dann die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$?

c) Es sei $A \in M(2 \times 3, K)$ mit $rg(A) = 2$. Wie viele Elemente hat dann die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$?

3+2+2 Punkte

Aufgabe 50 Es sei

α_1	α_2	α_3
α_4	α_5	α_6
α_7	α_8	α_9

ein magisches Quadrat, das heißt, dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_9$ natürliche Zahlen sind, und summiert man jeweils die Zeilen, die Spalten oder die Diagonalen, so ergibt dieser Wert jeweils eine feste Zahl $N \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die zugehörigen Gleichungen auf und beweisen Sie, dass $\alpha_7 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_8$, $\alpha_7 + \alpha_8 = \alpha_3 + \alpha_6$, sowie $2\alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_6$ gilt.

2 Punkte

Name: ______________________________