Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 1 Abgabetermin: Mittwoch, 24. Oktober 2012

Aufgabe 1 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

	richtig	falsch
X, Y und Z seien Mengen. Es gilt $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.	☐	☐
X, Y und Z seien Mengen. Es gilt $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	☐	☐
Auf einer Menge mit genau zwei Elementen gibt es genau 16 verschiedene Relationen.	☐	☐
Auf einer Menge mit genau zwei Elementen gibt es genau 4 verschiedene Relationen.	☐	☐
Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 2\}$ beschreibt eine Äquivalenzrelation.	☐	☐
$\{a, b\}$ ist eine Teilmenge der Menge $\{\{a, b\}, c, d\}$.	☐	☐

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Relationen auf einer Menge mit drei Elementen.
b) Wie viele davon sind symmetrisch? Wie viele davon sind reflexiv?

1+2 Punkte

Aufgabe 3 Es seien A und B Aussagen. Begründen Sie bitte immer Ihre Antworten.

a) Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen

$$A \Rightarrow B$$

und

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

durch das Aufstellen der entsprechenden Wahrheitswerttabellen.

b) Was ist die logische Verneinung der Aussage *Die Zahl* 36 *ist nicht durch* 6 *teilbar und* 36 *ist keine Quadratzahl*?

c) Modellieren Sie das *exklusive Oder* durch die Standardoperatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.

jeweils 1 Punkt

Aufgabe 4 Es seien X, Y, Z und T Mengen.

a) Beweisen oder widerlegen Sie $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$.

b) Finden Sie eine Formel für

$$(X \backslash Y) \times Z.$$

c) Beweisen Sie, dass aus $X \times Z \subset Y \times T$ und $X \times Z \neq \varnothing$ folgt, dass $X \subset Y$ und $Z \subset T$. (Warum ist die Zusatzbedingung $X \times Z \neq \varnothing$ nötig?)

jeweils 1 Punkt

Aufgabe 5

a) Formulieren und beweisen Sie das Prinzip der Doppelinduktion, d.h. ein Kriterium dafür, dass eine Aussage $B_{n,m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gültig ist.

b) Benutzen Sie dieses Prinzip, um zu zeigen, dass die Menge

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n : a_1 + \ldots + a_n = k\}$$

genau $\binom{k+n-1}{n-1}$ Elemente besitzt.

2+2 Punkte