(1) In dieser Aufgabe kreuzen Sie bitte nur die Antworten an, die Sie für richtig halten. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) Es seien A und B beliebige $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K. Nehmen Sie an, dass die Matrizen invertierbar sind, falls ein $(-)^{-1}$ in der Formel auftaucht. Dann gilt immer

$(AB)^{-1} =$	☒ $B^{-1}A^{-1}$	☐ $A^{-1}B^{-1}$	☐ $(BA)^{-1}$
$(AB)^t =$	☐ A^tB^t	☒ B^tA^t	☐ $(BA)^t$
$\det(A^{-1})^t =$	☒ $\det(A^{-1})$	☐ $-\det A^{-1}$	☐ $\det A^t$

1+1+1 Punkte

b) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension 15 und $U \subset V$ ein Untervektorraum der Dimension 3. Dann gilt.

$\dim_K(V/U) =$ ☐5 ☒ 12 ☐15 ☐18.

1 Punkt

c) Das multiplikative Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{Q})$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{cases} \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \boxtimes & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \square & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

1 Punkt

d) Es sei $f\colon K^4 \to K$ die K-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 x_i$. Dann hat der Kern von f die Dimension

☐1 ☐2 ☒ 3 ☐4. 1 Punkt

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Elemente des $\mathbb{R}^3$ schreiben wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_1 strecke die x_2-Achse mit dem Faktor $\sqrt{2}$ und spiegele die (x_1, x_3)-Ebene an der x_1-Achse und f_2 sei die Projektion $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
Es sei $S_1 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $S_2 = (e_1, e_2)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

a) Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.

f_1 bildet e_1 auf e_1, e_2 auf $\sqrt{2}e_2$ und e_3 auf $-e_3$ ab. Daher ist die Matrixdarstellung von f_1 bezüglich der Standardbasis gegeben als

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für f_2 rechnet man analog: $f_2(e_1) = 0$, $f_2(e_2) = e_1$ und $f_2(e_3) = e_2$. Daher ist

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung der Komposition berechnet man entweder direkt aus oder wir berechnen das Matrizenprodukt

$$M(f) = M(f_2)M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Was ist die Determinante von f_1?

Die darstellende Matrix hat Diagonalgestalt und daher ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge also $-\sqrt{2}$.

3 +1 Punkte

(3) Es sei $S = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des K^3 und $\mathcal{A}$ sei die Basis

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Stellen Sie die Transformationsmatrix $T^S_{\mathcal{A}} = M^S_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{K^3})$ auf.

Wir stellen die Standardbasisvektoren mithilfe der Basis $\mathcal{A}$ dar und erhalten:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix ist also

$$T^S_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte

(4) Ist die Familie $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ linear unabhängig im $\mathbb{C}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein! Wir berechnen

$$i \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

und erhalten den dritten Vektor

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

1 Punkt für die korrekte Antwort, 1 Punkt für die richtige Begründung

(5) Es seien V und W K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Definieren Sie, was der Kern und das Bild von f sind.

Der Kern von f ist

$$\ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$$

und das Bild von f ist

$$\mathrm{Bild}(f) = \{w \in W | \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\}.$$

1 + 1 Punkte

(6) Es seien V und W zwei K-Vektorräume gleicher endlicher Dimension und $f\colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass f surjektiv ist, falls es injektiv ist.

Die Dimensionsformel besagt, dass

$$\dim_K V = \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) + \dim_K(\ker(f)).$$

Ist die Abbildung f injektiv, so besteht ihr Kern nur aus dem Nullvektor, also ist die Dimension des Bildes gleich der Dimension von V. Nach Voraussetzung haben V und W aber übereinstimmende Dimensionen, also ist $\dim_K W = \dim_K V = \dim_K(\mathrm{Bild}(f))$. Das Bild ist aber immer ein K-Untervektorraum von W. Stimmt die Dimension eines Untervektorraums mit der Dimension des umgebenden Raumes überein, so stimmt der Untervektorraum mit dem Vektorraum überein, also ist das Bild von f gleich W. Das besagt aber gerade, dass die Abbildung surjektiv ist.

2 Punkte

(7) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht der affine Lösungsraum aus? Welche Dimension hat er?

Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Diese lautet

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um diese auf Zeilenstufenform zu bringen, ziehen wir das Zweifache der ersten Zeile von Zeile zwei und drei ab. Das liefert:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -18 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ziehen wir das Zweifache der zweiten Zeile von der dritten ab:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die gibt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ -x_2 - 2x_3 &= -9. \end{aligned}$$

Stellen wir dieses System so um, dass wir Abhängigkeiten nur von x_3 erhalten, so ergibt dies:

$$x_2 = 9 - 2x_3, \qquad 3x_1 + 4(9 - 2x_3) + 5x_3 = 9.$$

Das gibt insgesamt $x_2 = 9 - 2x_3$ und $x_1 - x_3 = -9$. Für jede Wahl von x_3 erhalten wir einen eindeutig bestimmten Lösungsvektor. Der affine Lösungsraum ist

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x = \begin{pmatrix} -9 + x_3 \\ 9 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dieser Raum hat Dimension 1, weil er der affinen Gerade

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entspricht.

Wahlweise kann man für die Bestimmung der Dimension auch den Rang der ursprünglichen Matrix bestimmen.

2 + 1 Punkte

(8) Betrachten Sie $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$. Geben Sie (ohne Rechnung) eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ an. Notieren Sie Elemente in $\mathbb{R}^3/U$ bitte als Äquivalenzklassen $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right]$ von Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$.

Das System $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und daher ist $\left(\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$.

1 Punkt

(9) Es sei $K_6[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Höchstgrad 6 und K^2 sei der 2-dimensionale Standardvektorraum über K. Welche Dimension hat der K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(K_6[X], K^2)$? Beweisen Sie Ihre Antwort; dabei müssen Sie die Dimensionen von $K_6[X]$ und K^2 nur korrekt benennen.

Der K-Vektorraum $K_6[X]$ hat Dimension 7 und K^2 hat Dimension 2. Daher hat der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(K_6[X], K^2)$ die Dimension $\dim_K \mathrm{Hom}_K(K_6[X], K^2) = 7 \cdot 2 = 14$.

Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_7)$ eine Basis von $K_6[X]$ und $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$ eine Basis von K^2, so ist das System $\mathcal{C} = (\varphi_j^i, 1 \leqslant i \leqslant 7, 1 \leqslant j \leqslant 2)$ eine Basis des Vektorraums der Homomorphismen, wobei

$$\varphi_j^i(v_k) = \left\{ \begin{cases} e_j, & k = i \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \right.$$

Beweis, dass dies wirklich eine Basis ist:

Es sei f ein beliebiger Homomorphismus, dann ist $f(v_i) = a_{i,1}e_1 + a_{i,2}e_2$ für irgendwelche Koeffizienten $a_{i,j} \in K$. Damit ist $f = \sum_{i=1}^7 a_{i,1}\varphi_1^i + a_{i,2}\varphi_2^i$, d.h. das System ist ein Erzeugendensystem.

Angenommen wir hätten

$$g = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}\varphi_j^i = 0$$

für Koeffizienten $\lambda_{i,j} \in K$. Das bedeutet, dass g die Nullabbildung ist. Insbesondere gilt dann $g(v_k) = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, 7\}$. Also bekommen wir $0 = g(v_k) = \lambda_1^k e_1 + \lambda_2^k e_2$. Aber e_1, e_2 ist eine Basis, daher sind die λ_j^i allesamt 0.

1 Punkt für die richtige Antwort, 2 Punkt für einen korrekten Beweis.

(10) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ sei ein Untervektorraum. Beweisen Sie, dass gilt

$$V \cong U \oplus (V/U).$$

Auf der rechten Seite kann nur die äußere direkte Summe gemeint sein, weil V/U kein Untervektorraum von V ist.

Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_k)$ von U und ergänzen diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ von V. Dann ist $\mathcal{C} = ([v_{k+1}], \ldots, [v_n])$ eine Basis von V/U.

Wir definieren U' als den von $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ erzeugten Untervektorraum von V. Dann gilt, dass die Summe von U und U' direkt ist und gleich V ist:

$$V = U \oplus U'.$$

Beweis davon: $\mathcal{B}'$ ist eine Basis von U und $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ erzeugt U'. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist, gilt, dass $U + U' = V$. Es sei $v \in U \cap U'$. Dann ist

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \qquad v = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i v_i.$$

Daher ist $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ mit $a_i = \lambda_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $a_i = -\mu_i$ für $k+1 \leqslant i \leqslant n$. Aber $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V, daher sind alle a_i gleich 0 und damit auch die λ_i, μ_i.

Wir zeigen im zweiten Schritt, dass V/U und U' isomorph sind. Dazu betrachten wir die Abbildung $f\colon U' \to V/U$, $f(v_i) = [v_i]$. Diese ist sichtbar K-linear und surjektiv. Injektiv ist sie ebenfalls, weil $([v_{k+1}], \ldots, [v_n])$ eine Basis von V/U ist.

$\square$

3 Punkte

(11) Benutzen Sie ein Determinantenkriterium um zu entscheiden, für welche $x \in \mathbb{Q}$ die Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \right)$$

linear unabhängig sind.

Die Determinante der Matrix ist (Entwicklung nach der ersten Spalte z.B.)

$$x(x^2 - 1) - 1(x - 1) + 1(1 - x) = x^3 - 3x + 2.$$

Wir wollen verstehen, wann diese Determinante 0 ist, d.h. wir suchen Nullstellen des Polynoms $x^3 - 3x + 2$. Wir sehen (z.B. an der Matrix), dass 1 eine Nullstelle sein muss. Es bleibt der quadratische Term $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$. Hiervon ist wiederum $x = 1$ eine Lösung und wir erhalten $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. Also ist genau für die Werte $x = 1$ und $x = -2$ das System

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \right)$$

linear abhändig. Für alle $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 1, -2$ ist das System linear unabhängig.

2 Punkte