Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 6 Abgabetermin: **Montag, 21. Mai 2012**

Aufgabe 21 (3 Punkte)

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass die Menge aller auf U holomorphen Funktionen eine $\mathbb{C}$-Algebra bildet. Beweisen Sie, dass diese Algebra genau dann nullteilerfrei ist, wenn U ein Gebiet ist.

Aufgabe 22 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gibt, die $f(z)^2 = z$ für alle $z \neq 0$ erfüllt und die für reelle $x > 0$ mit der reellen Wurzelfunktion übereinstimmt.

Aufgabe 23 (2 + 2 Punkte)

a) Benutzen Sie das Minimumprinzip, um einen alternativen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu geben.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ eine hebbare Singularität in $z = 0$ hat.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Wir hatten in der Vorlesung die Taylorentwicklung der Funktion $b(z) := \frac{z}{e^z - 1}$ betrachtet. Hierbei ist durch $b(0) := 1$ die Funktion holomorph in Null fortgesetzt. Setzen Sie

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Die B_n sind die *Bernoulli-Zahlen*. Zeigen Sie, dass $B_{2n+1} = 0$ gilt für $n \geqslant 1$ und leiten Sie die Rekursionsformel

$$\sum_{n=0}^{m-1} \binom{m}{n} B_n = 0$$

her für $m \geqslant 2$. Zeigen Sie, dass die B_n rational sind.