Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 11 Abgabetermin: **Montag, 2. Juli 2012**

Aufgabe 41 (1+2+2+1 Punkte)

Beweisen Sie die Rechenregeln für Residuen:

a) $\mathrm{res}_{z_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{res}_{z_0}(f) + \beta \mathrm{res}_{z_0}(g)$ für alle komplexen α, β.

b) Hat f in z_0 einen Pol k-ter Ordnung mit $k \geqslant 2$, so gilt $\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$, wobei $h(z) = (z-z_0)^k f(z)$ ist. Was passiert bei einem einfachen Pol?

c) Unter welchen Bedingungen gilt $\mathrm{res}_{z_0}(\frac{f}{g}) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$?

d) Hat f in z_0 einen einfachen Pol und ist g in z_0 holomorph, was ist dann $\mathrm{res}_{z_0}(gf)$?

Aufgabe 42 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Residuen der Funktion $z \mapsto \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$.

Aufgabe 43 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurententwicklung der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}.$$

Aufgabe 44 (3 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n(z) = \frac{z(z+1)\cdot \ldots \cdot (z+n)}{n! z^n}$ und die Gammafunktion sei definiert als

$$\Gamma(z) = \frac{1}{G(z)},$$

wobei $G(z)$ der Limes $\lim_n G_n(z)$ ist.

Wo haben die G_n und damit G Nullstellen? Wo ist G und wo ist Γ holomorph?

Benutzen Sie die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

und die Interpolationseigenschaft

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

für $k \in \mathbb{N}$ (ohne Beweis), um die Residuen von Γ zu bestimmen.