Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 1 Abgabetermin: **Donnerstag, 12. April 2012**

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)

a) Es sei $a_n = \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^n \in \mathbb{C}$. Was ist $|a_n|$?

b) Gibt es ein $n \geqslant 1$ mit $a_n = 1$?

c) Es sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ alle Lösungen der Gleichung $z^n = a$ explizit in Polarkoordinaten an.

d) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 - i = 0$ und zeichnen Sie die Lösungen.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte)

a) Rechnen Sie für $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ nach, dass für die zugehörigen Möbiustransformationen $\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_{AB}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass Φ_A auf $\bar{\mathbb{C}}$ genau dann die identische Abbildung ist, wenn A ein $\mathbb{C}^*$-Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

c) Beschreiben Sie die Abbildungen $z \mapsto \frac{1}{z}$ und $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ geometrisch, d.h. geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für die jeweiligen Bildpunkte an. Gehen Sie dabei davon aus, dass Sie $\mathbb{S}^1$ konstruiert haben. (Ihr Lineal hat keine Skala!)

Aufgabe 3 (1+2 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Mengen

$$X := \{z \in \mathbb{C} : |z+i| \leqslant 1\} \cup \{-1 + ai : a \in \mathbb{R}, 0 \leqslant a \leqslant 3\}$$

und

$$Y := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}.$$

b) Untersuchen Sie X und Y darauf, ob die Mengen wegzusammenhängend, offen, abgeschlossen, und/oder kompakt in der komplexen Ebene sind.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$ bildet mit der Multiplikation eine Gruppe. Es sei A eine abgeschlossene echte Untergruppe von $\mathbb{S}^1$. Zeigen Sie, dass A endlich ist. Wie muss A dann aussehen?