# Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie

Diplomarbeit

angefertigt am
Mathematischen Institut
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

vorgelegt von
Birgit Richter

Januar 1997

# Einführung

In dieser Arbeit werden zwei Verallgemeinerungen assoziativer Algebren untersucht. Diese Algebren haben nicht nur eine Multiplikation sondern zwei i.a. verschiedene Verknüpfungen, die mit den Symbolen $\vdash$ und $\dashv$ bezeichnet werden. Das jeweilige Axiomensystem gibt an, wie diese beiden Multiplikationen zueinander in Beziehung stehen.

Für assoziative Algebren gibt es eine Homologietheorie, die Hochschildhomologie. Möchte man für Algebren mit zwei Verknüpfungen eine Homologietheorie aufstellen, so muß man zusätzliche Informationen in die Kettenkomplexe einbauen, damit der Randoperator nach einer gewissen Vorschrift jeweils eine der beiden Multiplikationen auswählt, um die Randterme zu bilden.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit „Dialgebren". Ein schönes Beispiel einer Dialgebra, das Jean-Louis Loday in einer noch unveröffentlichten Arbeit [L-3] anführt, geht von einer differentiellen assoziativen Algebra (A, d) aus. In dieser Algebra kann man dann zwei Verknüpfungen $\vdash$ und $\dashv$ definieren, indem der Multiplikation in A das Differential d vorgeschaltet wird:

$$\begin{aligned} x \dashv y &:= xdy \\ x \vdash y &:= dxy \end{aligned}$$

Neben den gewöhnlichen Assoziativitätsgesetzen für beiden Produkte

$$\begin{aligned} x \dashv (y \dashv z) &= (x \dashv y) \dashv z \\ x \vdash (y \vdash z) &= (x \vdash y) \vdash z \end{aligned}$$

erfüllen die beiden Multiplikationen auch noch andere Relationen:

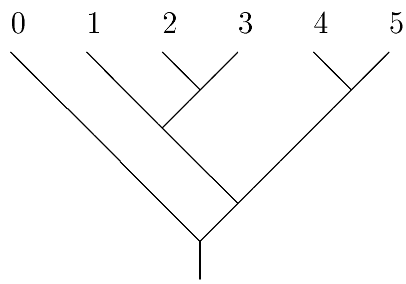
$$\begin{aligned} x \vdash (y \dashv z) &= (x \vdash y) \dashv z \\ x \dashv (y \dashv z) &= x \dashv (y \vdash z) \\ (x \vdash y) \vdash z &= (x \dashv y) \vdash z \end{aligned}$$

Genau diese fünf Relationen sind die Axiome einer Dialgebra. Ein anderes mögliches Assoziativgesetz gilt dagegen in Dialgebren i.a. nicht und auch nicht im obigen Beispiel (A, d):

$$x \dashv (y \vdash z) = (x \dashv y) \vdash z$$

Es ist nämlich $x\, d(dy\, z) = x\, dy\, dz$, aber $d(x\, dy)z = dx\, dy\, z$.

Jean-Louis Loday hat diese Art von Algebren zum ersten Mal in dem Artikel „Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres)" definiert und hat auch eine Homologietheorie für diese angegeben. Als Zusatzinformation enthalten seine Ketten planare binäre Bäume, z.B.




Der Randoperator zupft Blätter ab und setzt je nach Neigung des entfernten Blattes eines der beiden Zeichen.

Jean-Louis Lodays Ergebnisse werden zunächst rekapituliert. Das aus der Hochschildtheorie bekannte Resultat, daß für unitäre assoziative Algebren die Homologie des bar-Komplexes verschwindet, läßt sich auf Dialgebren übertragen, wenn man eine geeignete Modifikation des Begriffes eines Einselementes wählt. Dieses Resultat wird im Abschnitt über Eigenschaften der Homologie von Dialgebren (1.3) bewiesen.

Im darauffolgenden Teil wird die naheliegende Frage untersucht, was passiert, wenn man die Dialgebra-Homologie auf assoziative Algebren anwendet. Bei unitären assoziativen Algebren verschwindet sowohl die bar-Homologie $H_*^{bar}(A)$ als auch die Dialgebra-Homologie $HY_*(A)$. Bei nicht-unitären Algebren können sich beide Theorien aber erheblich unterscheiden. Zumindest findet man aber eine Einbettung der Hochschildtheorie in die Homologie der Dialgebren:

$$H_{n+1}^{bar}(A) \hookrightarrow HY_n(A)$$

Eine Homologietheorie mit Koeffizienten hat Alessandra Frabetti in ihrer Doktorarbeit „(Co)homologia della dialgebre" entwickelt. Diese Theorie wird in Abschnitt 1.5 vorgestellt.
Verwendet man bestimmte Koeffizienten, so gilt für unitäre Dialgebren die Morita-Invarianz für Matrizen, d.h. die Homologie der Dialgebra mit diesen Koeffizienten $M$ stimmt mit der Homologie der Matrizendialgebra mit Koeffizienten in den Matrizen über $M$ überein.

$$HY_n(M_r(D), M_r(M)) \cong HY_n(D, M)$$

In Abschnitt 1.6 wird ein Beweis dieses Theorems mittels einer expliziten Kettenhomotopie gegeben.

Zum Abschluß der Untersuchung der Dialgebren wird in Abschnitt 1.6 ein grober Überblick über die Theorie der $k$-linearen Operaden gegeben und Jean-Louis Lodays Ergebnisse für die Operade der Dialgebren werden dargestellt.

Ausgangspunkt für diese Arbeit war die Suche nach einer Anwendung solcher Algebren mit zwei Multiplikationen auf den Zellenkomplex der Parallelschlitzgebiete. C.-F. Bödigheimer hat diesen Zellenkomplex in der Arbeit „On the topology of moduli spaces of Riemann surfaces, Part I: Hilbertuniformization" [B-1] definiert. Der Zellenkomplex wird im zweiten Teil der Arbeit vorgestellt und seine Bedeutung als neues Modell für den Modulraum gerichteter Riemannscher Flächen wird aufgezeigt. In Anlehnung an die Homologietheorie für Dialgebren wird eine Verallgemeinerung einer der in dem Artikel „Cyclic homology and moduli spaces of Riemann surfaces" [B-2] aufgestellten Homologietheorien gegeben. Dieser Homologie liegen aber andere Axiome zugrunde als die Axiome für Dialgebren. Dies war Anlaß, eine neues algebraisches Objekt, die „Doppelalgebren", einzuführen.

Der dritte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Charakterisierung dieser Algebren, ihren möglichen Homologietheorien und deren Eigenschaften.

Im Gegensatz zu den Dialgebren, die kanonisch mit der Struktur einer Leibniz-Algebra versehen werden können, entspricht den Doppelalgebren die Struktur von Lie-Algebren. Es werden die Lie-Algebrastruktur und die universelle einhüllende Doppelalgebra einer Lie-Algebra untersucht.

Während es schwierig ist, Beispiele für Dialgebren anzugeben, so fällt dies bei Doppelalgebren leichter. Im Abschnitt 3.2 werden einige Beispiele benannt. Das einfachste Beispiel für eine Doppelalgebra sind assoziative Algebren, bei denen beide Multiplikationen skaliert werden.

$$\begin{aligned} x \vdash y &= \lambda xy \\ x \dashv y &= \mu xy \end{aligned}$$

Diese Algebra erfüllt die Axiome einer Doppelalgebra, d.h. die beiden Verknüpfungen verhalten sich assoziativ, gleichgültig welche Kombination von Zeichen vorkommt.

$$\begin{aligned} (x \vdash y) \vdash z &= x \vdash (y \vdash z) \\ (x \vdash y) \dashv z &= x \vdash (y \dashv z) \\ (x \dashv y) \vdash z &= x \dashv (y \vdash z) \\ (x \dashv y) \dashv z &= x \dashv (y \dashv z) \end{aligned}$$

Für Doppelalgebren gibt es verschiedene Möglichkeiten, eine Homologietheorie zu definieren. Diesmal werden $n$ bzw.$(n-1)$-Tupel von Multiplikationszeichen den Ketten als Informationen mitgegeben. Die Elemente des Kettenkomplexes sehen also wie folgt aus:

$$(\vdash, \dashv, \vdash) \otimes (a_1, a_2, a_3, a_4) \qquad \text{oder}$$
$$(\dashv, \vdash, \vdash, \dashv, \vdash, \vdash) \otimes (a_1, \ldots, a_7)$$

Eine Theorie entspricht der bar-Homologie von assoziativen Algebren, die andere dem vollen Hochschildkomplex. In Abschnitt 3.3, der Eigenschaften der Homologie von Doppelalgebren behandelt, wird zunächst definiert, was eine unitäre

Doppelalgebra ist. Anders als bei Dialgebren ist die Einheit einer solchen Doppelalgebra eindeutig bestimmt. Für unitäre Doppelalgebren ergeben sich einige Eigenschaften für die Homologietheorien:

Unitäre Doppelalgebren haben verschwindende Homologie bezüglich des Komplexes, welcher dem bar-Komplex der Hochschildtheorie ähnlich ist. Für die Variante der Homologie, die der Hochschildhomologie für assoziative Algebren entspricht, gilt wiederum Morita-Invarianz für unitäre Doppelalgebren.

$$HZ_n(M_r(D)) \cong HZ_n(D)$$

Wendet man die Homologietheorie für Doppelalgebren auf assoziative unitäre Algebren an, so liefert dies dieselben Ergebnisse, wie die Hochschildtheorie:

$$HZ_n(A, M) \cong H_n(A, M)$$

Ein weiteres wichtiges Ergebnis in der Untersuchung der Doppelalgebra-Homologie ist, daß in dieser Theorie die freie Doppelalgebra eines Vektorraums azyklisch ist.

Weiterhin wird die simpliziale Struktur der Kettenkomplexe untersucht. Im Gegensatz zum Komplex für Dialgebren ist der Kettenkomplex für Doppelalgebren ein simplizialer und nicht nur ein pseudo-simplizialer Komplex. Die Homologietheorie von Doppelalgebren erlaubt die Aufstellung eines Doppelkomplexes für zyklische Homologie, weil der zugrundeliegende Kettenkomplex ein zyklischer Modul ist. Damit lassen sich dann die Ergebnisse der zyklischen Homologie im Hochschild-Kontext übertragen.

Eine Homologie- und Kohomologietheorie mit Koeffizienten wird in Abschnitt 3.5 vorgestellt. Koeffizienten für die Kohomologie sind Darstellungen von Doppelalgebren, für die Homologie wählt man Koeffizienten in einer Kodarstellung. Die zweite Kohomologie klassifiziert die Erweiterungen von Doppelalgebren; die Derivationen einer Doppelalgebra mit Werten in einer Darstellung bilden die erste Kohomologie.

Am Schluß dieser Arbeit wird kurz auf die Operade der Doppelalgebren eingegangen und es wird plausibel gemacht, warum diese Operade wahrscheinlich Koszul ist.

### Danksagungen

Herrn Professor Carl-Friedrich Bödigheimer möchte ich für das ungewöhnliche und interessante Thema sowie für die Betreuung danken. Ihm danke ich auch für die Einladung von Alessandra Frabetti nach Bonn.
Vielen Dank an Ale `:-)` für die tolle Zusammenarbeit in Bologna, Bonn und per e-mail.
Für zwei offene Ohren bei Fragen der Operadentheorie danke ich Volker Eisermann.

Arndt Boland danke ich für das geduldige Zuhören bei Problemen und Sackgassen. Marc Hannappel und Arndt danke ich für das Korrekturlesen dieser Arbeit, besonders weil sie nicht in das mathematische Arbeitsgebiet der beiden fällt.
Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für die finanzielle Unterstützung meines Studiums.

Birgit Richter

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Dialgebren

## 1.1 Grundlagen

### 1.1.1 Definition und Beispiele

Die Definition einer Dialgebra stammt von Jean-Louis Loday. Sein Artikel „Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres)” [L-2] enthält neben der Definition einige Beispiele, den Zusammenhang zwischen Dialgebren und Leibnizalgebren, die Benennung der freien Dialgebra über einem Vektorraum V sowie die Einordnung der Dialgebren in den Kontext der Operaden.

#### 1.1.1.1 Definition

Eine **Dialgebra** über einem Körper $k$ ist ein $k$-Vektorraum $D$ mit zwei linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \vdash: & D \otimes D & \to & D \\ \dashv: & D \otimes D & \to & D \end{array}$$

welche folgende Regeln erfüllen:

$$\begin{array}{lclcl} x \dashv (y \dashv z) & \overset{1}{=} & (x \dashv y) \dashv z & \overset{2}{=} & x \dashv (y \vdash z) \\ x \vdash (y \dashv z) & \overset{3}{=} & (x \vdash y) \dashv z & & \\ x \vdash (y \vdash z) & \overset{4}{=} & (x \vdash y) \vdash z & \overset{5}{=} & (x \dashv y) \vdash z \end{array}$$

**Beispiele**

1) Setzt man $\vdash = \dashv$ so erhält man eine assoziative Algebra [L-2].

2) $A$ sei eine Algebra , $TA$ der zugehörige Tensormodul $TA = k \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \cdots$. Dann kann man zwei Abbildungen auf den Erzeugern definieren, indem man von rechts bzw. links eine bestimmte Anzahl von Elementen zusammenmultipliziert:

$$
\begin{array}{ccccc}
A^{\otimes n} & \otimes & A^{\otimes m} & \longrightarrow & A^{\otimes min(n,m)} \\
(a_1, \cdots, a_n) & \vdash & (a_{n+1}, ..., a_{n+m}) & := & (\prod_{i=1}^{max(n,m)+1} a_i, a_{max(n,m)+2}, \cdots, a_{n+m})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
A^{\otimes n} & \otimes & A^{\otimes m} & \longrightarrow & A^{\otimes min(n,m)} \\
(a_1, \cdots, a_n) & \dashv & (a_{n+1}, \cdots, a_{n+m}) & := & (a_1, \cdots, a_{min(n,m)-1}, \prod_{i=min(n,m)}^{n+m} a_i)
\end{array}
$$

Bemerkung: Diese Produkte erfüllen auch noch die Axiome einer Dialgebra, wenn die Grenze für die Multiplikation größer als max(n,m) bzw. kleiner als min(n,m) gewählt wird. Es müssen nur genügend Elemente multipliziert werden, weil sonst die Axiome 2 und 5 einer Dialgebra nicht gelten.

3) Sind $D$ und $D'$ Dialgebren so auch ihr Tensorprodukt $D \otimes D'$, indem man die Elemente komponentenweise verknüpft [L-2]. Auf den Erzeugern ergibt dies:

$$
\begin{aligned}
(a \otimes b) \vdash (a' \otimes b') &:= (a \vdash a') \otimes (b \vdash b') \\
(a \otimes b) \dashv (a' \otimes b') &:= (a \dashv a') \otimes (b \dashv b')
\end{aligned}
$$

Insbesondere bilden die Matrizen über einer Dialgebra vermöge der Identifizierung $M_n(D) = M_n(k) \otimes D$ eine Dialgebra. Die Matrizenmultiplikation funktioniert wie bei einer assoziativen Algebra:

$$
\begin{aligned}
(A \vdash B)_{il} &= \sum_j a_{i,j} \vdash b_{j,l} \\
(A \dashv B)_{il} &= \sum_j a_{i,j} \dashv b_{j,l}
\end{aligned}
$$

Die üblichen algebraischen Konstruktionen für assoziative Algebren lassen sich übertragen.

#### 1.1.1.2 Definition

Ein Untervektorraum $I$ einer Dialgebra $D$ heißt **Dialgebra-Ideal**, wenn gilt:

$$
a \vdash b, \quad a \dashv b, \quad b \vdash a, \quad b \dashv a \qquad \in I \qquad \forall \quad b \in D, a \in I \, .
$$

Damit ist dann das Quotientenobjekt $D/I$ ebenfalls eine Dialgebra.

#### 1.1.1.3 Definition

Eine **Abbildung von Dialgebren** ist ein Vektorraumhomomorphismus, der die beiden Multipliktionen respektiert:

$f(a \vdash b) = f(a) \vdash f(b)$
$f(a \dashv b) = f(a) \dashv f(b)$

Nach Loday [L-2] läßt sich jedes Monom in einer Dialgebra in folgender Weise vereinfachend darstellen:

**Lemma**
Zu einem Monom $x_1 \circ_1 \cdots \circ_{n-1} x_n$ mit $\circ_j \in \{\vdash, \dashv\}$ und gegebener Klammerung der Elemente gibt es einen Index i $\in \{1, \cdots, n\}$ , so daß

$$x_1 \circ_1 \cdots \circ_{n-1} x_n = x_1 \vdash \cdots \vdash x_i \dashv \cdots \dashv x_n$$

Die Aussage des Lemmas ist aufgrund der Dialgebra-Axiome 2 und 5 klar. Diese beiden Axiome erlauben es, rechtsstehende $\vdash$-Zeichen nach links zu verschieben, sofern links davon noch $\dashv$-Zeichen stehen und ebenso können linksstehende $\dashv$-Zeichen nach rechts verlagert werden, wenn rechts $\vdash$-Zeichen vorhanden sind.
Diese Betrachtung führt dazu, daß man für die freie Dialgebra über einem Vektorraum $V$ eine sehr übersichtliche Form findet. Loday hat die folgende Aussage in [L-2] formuliert:

#### 1.1.1.4 Satz

Die **freie Dialgebra** $\mathcal{F}(V)$ zu einem Vektorraum $V$ ist $TV \otimes V \otimes TV$ d.h. für jeden Vektorraumhomomorphismus $f : V \to D$ gibt es einen Dialgebra-Morphismus

$$\tilde{f} : TV \otimes V \otimes TV \to D$$

so daß $\tilde{f} \circ i = f$, wobei $i$ die natürliche Inklusion $V \hookrightarrow TV \otimes V \otimes TV$ ist. $TV \otimes V \otimes TV$ ist dabei mit folgender Dialgebrastruktur versehen :

$$\begin{aligned} u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 \vdash u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 &:= (u_1 v_1 w_1 u_2) \otimes v_2 \otimes w_2 \\ u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 \dashv u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 &:= u_1 \otimes v_1 \otimes (w_1 u_2 v_2 w_2) \end{aligned}$$

**Beweis**
Die freie Dialgebra über $V$ besteht aus den Monomen $x_1 \circ_1 \cdots \circ_{n-1} x_n$ mit $x_l \in V, \circ_j \in \{\vdash, \dashv\}$. Nach dem vorigen Lemma kann man solch ein Monom in $x_1 \vdash \cdots \vdash x_i \dashv \cdots \dashv x_n$ umformen. Der Isomorphismus mit $TV \otimes V \otimes TV$ ist dann durch

$$x_1 \vdash \cdots \vdash x_i \dashv \circ \dashv x_n \mapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1}) \otimes x_i \otimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

gegeben. $\square$

#### 1.1.1.5 Proposition

Sei $D$ eine Dialgebra und $V$ der $D$ zugrundeliegende Vektorraum. Dann ist $D$ präsentierbar als Quotient der freien Dialgebra von $V$:

$$D \cong TV \otimes V \otimes TV/R$$

**Beweis**
Wähle $f$ als die Identität; dann gibt es eine Abbildung
$\varphi : TV \otimes V \otimes TV \to D \quad \text{mit} \quad \varphi \circ i = id$
$\Longrightarrow \quad TV \otimes V \otimes TV/\ker\varphi \cong D \qquad$ als Vektorräume.
Da ker $\varphi$ ein Ideal von Dialgebren ist, ist dies auch ein Isomorphismus von Dialgebren.

□

### 1.1.2 Dialgebren und Leibnizalgebren

#### 1.1.2.1 Definition

Eine **Leibniz-Algebra** ist ein Vektorraum $V$ zusammen mit einer linearen Abbildung

$$[\quad,\quad] : V \otimes V \longrightarrow V\,,$$

welche folgende Relation erfüllt:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y] \qquad \forall x,y,z \in V$$

#### 1.1.2.2 Satz

Mit der Abbildung

$$\begin{array}{cccc} [\quad,\quad]: & D \otimes D & \longrightarrow & D \\ & [\text{x,y}] & = & x \dashv y - y \vdash x \end{array}$$

wird die Dialgebra $D$ zu einer Leibniz-Algebra Leib($D$). Diese Zuordnung ist funktoriell.

**Bemerkung**
In einer assoziativen Algebra gibt es die übliche Lie-Klammer

$$[a,b] := ab - ba\ .$$

Möchte man die Antisymmetrie $[a, b] = -[b, a]$ dieser Abbildung beseitigen, so kann man dies versuchen, indem man statt der einfachen Multiplikationen zwei unterschiedliche Verknüpfungen $\vdash, \dashv$ wählt und eine variierte Abbildung
$[a, b] := a \dashv b - b \vdash a$ definiert. Die Bedingung, daß diese Abbildung eine Leibniz-Klammer definiert, führt gerade auf die Axiome einer Dialgebra.

Die **universelle einhüllende Dialgebra** $\mathcal{UD}(g)$ einer Leibniz-Algebra $g$ ist definiert als die freie Dialgebra des Vektorraums $g$ , bei der aber die Leibniz-Klammer $[\quad,\quad]_g$ von $g$ durch die Leibniz-Klammer von Dialgebren ersetzt wird.

$$\mathcal{UD}(g) = Tg \otimes g \otimes Tg / \langle [x, y]_g - x \dashv y + y \dashv x \rangle$$

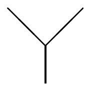
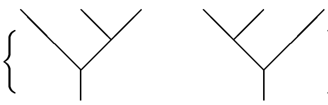
#### 1.1.2.3 Proposition

Der Funktor $\mathcal{UD}$ ist linksadjungiert zum Funktor Leib. [L-2]

## 1.2 Homologie von Dialgebren

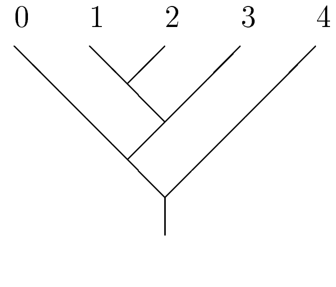
Um eine Homologietheorie für Dialgebren zu definieren, die sich an die Hochschildhomologie anlehnt, braucht man ein zusätzliches Datum, das darüber entscheidet, welche Multiplikation jeweils in den Seitenabbildungen verwendet werden soll. Jean-Louis Loday [L-2] hat dafür planare binäre Bäume benutzt. Die Neigungen der inneren Blätter des Baumes bestimmen die Wahl des Produktes.

Sei $Y_n$ die Menge aller planaren binären Bäume mit einer Wurzel und n Verzweigungen, also

$Y_0 = \{|\}$ , $Y_1 = \{$  $\}$ , $Y_2 = \{$  $\}$

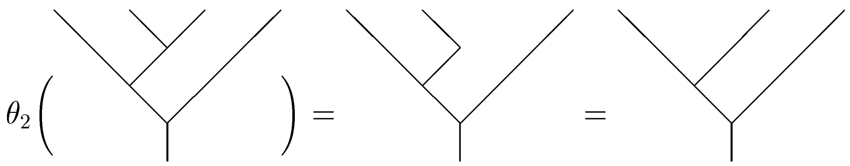
Ein solcher Baum ist durch die Lage der Verzweigungspunkte festgelegt; Verformungen der Blätter sind irrelevant. Wir betrachten nur Bäume, bei denen von den Verzweigungspunkten gerade Äste und Blätter ausgehen. Die Blätter dieser Bäume seien von 0 bis n durchnumeriert.

**Beispiel**



Die Anzahl der binären planaren Bäume mit n Ecken ist $c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.
Um einen Randoperator definieren zu können, muß man festlegen, wie man einen Baum aus $Y_n$ auf einen Baum aus $Y_{n-1}$ abbildet. Dazu dient eine Abbildung, die an der Stelle i ein Blatt entfernt:
Ist y ein Baum aus $Y_n$, dann ist $\theta_i(y)$ der Baum, der aus y entsteht, indem man das i-te Blatt abzupft.

Beispielsweise ist



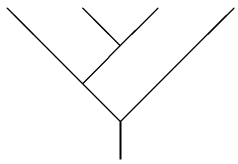
Zu beobachten ist bei diesen Abbildungen, daß andere Blätter umklappen können, wenn man ein Blatt entfernt; man muß also bei dem Randoperator die Struktur des Baumes berücksichtigen und kann sich nicht auf die oberen Blätter beschränken.

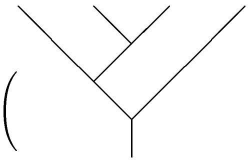
Das durch $\theta_i$ entfernte Blatt entscheidet über das Verknüpfungszeichen $\circ_i^y$ der Elemente $a_i$ und $a_{i+1}$. War das i-te Blatt von der Form / , so wird das Zeichen $\vdash$ gewählt, hatte es dagegen eine Linksneigung $\setminus$ so werden die Elemente mit $\dashv$ verknüpft. Die Wahl des Multiplikationszeichens hängt also sowohl vom gegebenen Baum $y$, als auch von der Nummer des gewählten Blattes ab. Für den Kettenkomplex sind nur die inneren Blätter relevant.

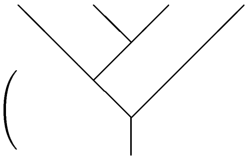
Nun kann man einen Kettenkomplex und die daraus resultierende Homologie von Dialgebren definieren:

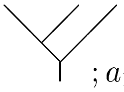
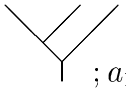
$$\begin{array}{rcl} CY_n(D) & := & k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \\ d_i(y; a_1, \cdots, a_n) & := & (\theta_i(y); a_1, ..., a_i \circ_i^y a_{i+1}, \cdots, a_n) \\ \mathrm{d} & := & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i d_i \\ HY_n(D) & := & H_n(CY_n(D), d) \end{array}$$

**Beispiel:**

Für den Baum  ist $\circ_1^y = \dashv$ und $\circ_2^y = \vdash$.

Damit ergibt sich für den Rand des Elementes (  $; a_1, a_2a_3)$ folgende Rechnung:

d (  $; a_1, a_2a_3)$

$= -($  $; a_1 \dashv a_2, a_3) + ($  $; a_1, a_2 \vdash a_3)$

Es bleibt zu zeigen, daß d wirklich einen Randoperator definiert, d.h. die Gleichung d $\circ$ d $= 0$ erfüllt.

**Beweis** Für die $d_i$ gelten folgende Relationen:

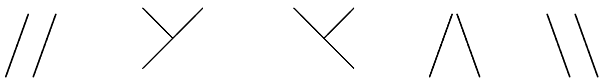
$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad \text{für} \quad i < j$$

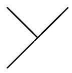
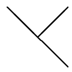
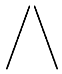
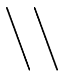
Wenn $j \neq i+1$ ist, berechnen sich die Terme wie folgt:

$$\begin{aligned}
d_i d_j(y; a_1, \cdots, a_n) &= d_i(\theta_j(y); a_1, \cdots, a_j \circ_j^y a_{j+1}, \cdots, a_n) \\
&= (\theta_i\theta_j(y); a_1, \cdots, a_i \circ_i^{\theta_j(y)} a_{i+1}, \cdots, a_j \circ_j^y a_{j+1}, \cdots, a_n) \\
d_{j-1} d_i(y; a_1, \cdots, a_n) &= d_{j-1}(\theta_i(y); a_1, \cdots, a_i \circ_i^y a_{i+1}, \cdots, a_n) \\
&= (\theta_{j-1}\theta_i(y); a_1, \cdots, a_i \circ_i^y a_{i+1}, \cdots, a_j \circ_j^{\theta_i(y)} a_{j+1}, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

Da sowohl die entstandenen Bäume, als auch die verwendeten Zeichen gleich sind, ist die Behauptung für diesen Fall bewiesen.

Im Fall j = i+1 kommt es darauf an, wie die Blätter i und i+1 zueinander stehen. Es gibt fünf Möglichkeiten:

 Es muß also gelten

| | |
|---|---|
|  | $a_i \vdash (a_{i+1} \vdash a_{i+2}) = (a_i \vdash a_{i+1}) \vdash a_{i+2}$ |
|  | $a_i \vdash (a_{i+1} \vdash a_{i+2}) = (a_i \dashv a_{i+1}) \vdash a_{i+2}$ |
|  | $a_i \dashv (a_{i+1} \vdash a_{i+2}) = (a_i \dashv a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$ |
|  | $a_i \vdash (a_{i+1} \dashv a_{i+2}) = (a_i \vdash a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$ |
|  | $a_i \dashv (a_{i+1} \dashv a_{i+2}) = (a_i \dashv a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$ |

Diese Gleichungen sind in einer Dialgebra erfüllt.

$\square$

**Bemerkung**
Einen Rand analog zum Hochschildrand, der den letzten Eintrag mit dem ersten multipliziert, kann man im Kontext der Dialgebren nicht einfach definieren, indem man einen Baum aus $Y_{n+1}$ wählt und ansonsten die Randabbildung fortsetzt, weil man dazu folgendes Assoziativgesetz benötigt:

$$(a \dashv b) \vdash c = a \dashv (b \vdash c)$$

Das gilt aber in Dialgebren i.a. nicht. Man kann aber in dem Spezialfall einer assoziativen Algebra eine Dialgebra-Homologie definieren, die solch einen Rand benutzt, weil dann dieses Gesetz erfüllt ist. Das hat Alessandra Frabetti in [F-1] ausgeführt.
Einen anderen Randoperator, der das letzte mit dem ersten Element verknüpft, erhält man durch

$d_n(y; a_0, \cdots, a_n) := (\theta_n(y); a_n \vdash a_0, \cdots, a_{n-1})$
$d_0(y; a_0, \cdots, a_n) := (\theta_0(y); a_0 \dashv a_1, \cdots, a_n)$

Dies ist ein Spezialfall der Homologie mit Koeffizienten; diese Theorie wird weiter unten in einem eigenen Abschnitt behandelt.

## 1.3 Eigenschaften der Homologie

#### 1.3.0.4 Satz

Die freie Dialgebra eines Vektorraums $V$ ist azyklisch, d.h.

$$HY_*(TV \otimes V \otimes TV) = \begin{cases} V & * = 0 \\ 0 & * > 0 \end{cases}$$

**Beweis** siehe [L-2]

### 1.3.1 Unitäre Dialgebren

Die Homologie für Dialgebren verschwindet bei Dialgebren mit Einselement wie die Homologie des bar-Komplexes in der Hochschildhomologie, wenn man den Begriff des 'Einselementes' geeignet modifiziert (wie in [L-3]).

#### 1.3.1.1 Definition

Eine **unitäre Dialgebra** ist eine Dialgebra, die ein Element $e$ enthält, für das gilt: $e \vdash d = d = d \dashv e \qquad \forall d \in D$

**Bemerkung 1**
In einer Dialgebra ist das Einselement i.a. nicht eindeutig. Das folgende von Loday in [L-3] angegebene Beispiel für eine Dialgebra, zeigt, daß es in einer Dialgebra sehr viele neutrale Elemente geben kann:

$A$ sei eine assoziative $k$-Algebra. Betrachte $D := A^{\otimes 2}$ mit folgenden Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} a \otimes b \dashv a' \otimes b' &:= a \otimes ba'b' \\ a \otimes b \vdash a' \otimes b' &:= aba' \otimes b' \end{aligned}$$

Hat $A$ eine Eins $1_A$ , so ist natürlich $1_A \otimes 1_A$ eine Einheit in der Dialgebra $D$. Aber ebenso gibt es zu jedem invertierbaren Element der Algebra eine weitere Einheit. Ist $x$ invertierbar in $A$, so ist $x \otimes x^{-1}$ eine Einheit in $D$, weil

$$\begin{aligned} x \otimes x^{-1} \vdash a \otimes b &= xx^{-1}a \otimes b \\ a \otimes b \dashv x \otimes x^{-1} &= a \otimes bxx^{-1} \end{aligned}$$

**Bemerkung 2**
Es ist nicht sinnvoll zu verlangen, daß es ein Element gibt, das die Gleichung $e \dashv d = d = d \vdash e \quad \forall d \in D$ erfüllt. Dann folgt nämlich

$$x \dashv y = e \dashv (x \dashv y) = e \dashv (x \vdash y) = x \vdash y$$

und damit ist $D$ eine assoziative Algebra, weil beide Multiplikationen zusammenfallen.

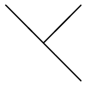
#### 1.3.1.2 Satz

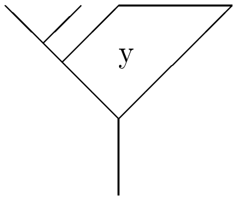
Ist $D$ eine unitäre Dialgebra, dann gilt

$$HY_*(D) = 0$$

**Beweis**
Definiere eine Kettenhomotopie

$$\tilde{s}(y; a_1, \cdots, a_n) := -(v(y); e, a_1, \cdots, a_n)$$

wobei $v(y)$ der Baum ist, bei dem das 0-te Blatt durch  ersetzt wurde:




Es gilt:

$$\begin{aligned} d_1\tilde{s} &= -\mathrm{id} \\ d_i\tilde{s} &= -(\theta_i(v(y); e, \cdots, a_{i-1} \circ_i^{v(y)} a_i, \cdots, a_n) \\ \tilde{s}d_{i-1} &= -(v(\theta_{i-1}(y)); e, \cdots, a_{i-1} \circ_{i-1}^{y} a_i, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \tilde{s}d + d\tilde{s} = id$ $\square$

**Bemerkung 1**
Zu einer gegebenen unitären Dialgebra $D$ ist die dazugehörige Matrizen-Dialgebra $M_n(D)$ ebenfalls unitär. Damit ist

$$HY_*(M_n(D)) = 0 = HY_*(D) \qquad \forall n$$

Somit ist die Morita-Invarianz für unitäre Dialgebren trivialerweise erfüllt für die Homologie mit Koeffizienten im Grundkörper. Weiter unten wird die Homologie mit Koeffizienten betrachtet. In dieser Theorie verschwindet die Homologie für unitäre Dialgebren nicht unbedingt. In diesem Kontext muß die Morita-Invarianz bewiesen werden. **Bemerkung 2**
Für die Aussage des Satzes genügt eine Dialgebra $D$, welche die folgende Eigenschaft erfüllt:

Für alle $a_1 \in D$ gibt es ein eindeutig bestimmbares $e(a_1)$ mit $e(a_1) \vdash a_1 = a_1$. Definiere dann:

$$\tilde{s}(y; a_1, \cdots, a_n) := (v(y); e(a_1), a_1, \cdots, a_n)$$

**Beispiel**
Der direkte Limes der Matrizen über einer unitären Dialgebra M(D) hat dann ebenfalls verschwindende Homologie, weil es für jede Matrix aus M(D) ein neutrales Element gibt, nämlich die Einheitsmatrix des entsprechenden Formates.

## 1.4 Vergleich mit der Hochschildtheorie

### 1.4.1 Rekapitulation der Hochschildhomologie

Da wir im folgenden die Homologie von Dialgebren mit der Hochschildtheorie vergleichen wollen, rekapitulieren wir kurz die Definitionen der Homologietheorie für assoziative Algebren.
Gegeben sei eine assoziative Algebra $A$ und ein $A$-Bimodul $M$. Dann kann man einen Kettenkomplex für die Homologie von $A$ mit Koeffizienten in $M$ angeben:
$C_n(A, M) := M \otimes A^{\otimes n}$
Die Seitenabbildungen für die Hochschildhomologie fassen immer zwei benachbarte Elemente zusammen:

$$b_i(m; a_1, \ldots, a_n) := \begin{cases} (ma_1; a_2, \ldots, a_n) & , \quad i = 0 \\ (m; a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) & , \quad i \neq 0, n \\ (a_n m; a_1, \ldots, a_{n-1}) & , \quad i = n \end{cases}$$

Der Randoperator ist dann die alternierende Summe über die $b_i$:

$$b := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i$$

Die Homologie dieses Komplexes ist die Hochschildhomologie mit Koeffizienten in dem $A$-Bimodul $M$.

$$H_n(A, M) := H(C_n(A, M), b)$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $M = A$, wenn also die Algebra selbst als Bimodul fungiert. Für $H_n(A, A)$ schreibt man auch abkürzend $HH_n(A)$.
Summiert man bei dem Rand dagegen nur über $n-1$ Seitenabbildungen, so erhält man den bar-Komplex für assoziative Algebren:

$C_n^{bar}(A) = A^{\otimes n+1}$ und $b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i b_i$.

Dessen Homologie wird mit $H_*^{bar}(A)$ bezeichnet.

### 1.4.2 HY(A) für assoziative Algebren

Möchte man die Homologie der Dialgebren mit der Hochschildhomologie vergleichen, kommt nur die Homologie des bar-Komplexes in Frage, weil bei der Homologietheorie der Dialgebren der Randoperator nicht das letzte Element des Tensoreintrags mit dem ersten Element verknüpft.
Assoziative Algebren sind Dialgebren, bei denen beide Multiplikationen $\vdash, \dashv$ übereinstimmen. Bei unitären assoziativen Algebren verschwindet die Homologie des bar-Komplexes: $H_*^{bar}(A) = 0$.
Die Kettenhomotopie $\tilde{s}$ kann man als Hochhebung der Kettenhomotopie im Fall der unitären assoziativen Algebren auffassen. (siehe [L-1], Seite 12)

$$\begin{array}{cccc} s\colon & C_n^{bar}(A) & \longrightarrow & C_{n+1}^{bar}(A) \\ & (a_0, \cdots, a_n) & \mapsto & (1, a_0, \cdots, a_n) \end{array}$$

Man erhält folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[Y_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1} & \xrightarrow{-\tilde{s}} & k[Y_{n+2}] \otimes A^{\otimes n+2} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A^{\otimes n+1} & \overrightarrow{s} & A^{\otimes n+2} \end{array}$$

$\varphi$ ist die Abbildung, die den Baum vergißt: $\varphi(y; a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_n)$

Insbesondere stimmen also für unitäre Algebren die Hochschildtheorie und die Homologietheorie der Dialgebren überein, weil in beiden Fällen die Homologie verschwindet. Es ist also sinnvoll, auch für nicht unitäre assoziative Algebren das Verhältnis der beiden Theorien zu untersuchen. Aber im Gegensatz zu den unitären assoziativen Algebren unterscheiden sich beide Theorien, wenn man Algebren ohne Eins betrachtet:

#### 1.4.2.1 Proposition

Für

$$A = k\langle x \rangle / x^2 = 0$$

ist $\quad H_{n-1}^{bar}(A) = A^{\otimes n} \quad$ aber $\quad HY_n(A) = k[Y_n] \otimes A^{\otimes n}$

**Beweis**

Jedes Element aus $A$ ist von der Form $l \cdot x$, wobei $l$ ein Skalar aus dem Grundkörper ist und $x$ der Erzeuger.
Daher sind die $n$-Tupel $(a_1, \cdots, a_n)$ und $(y; a_1, \cdots, a_n)$ Zykel, weil $d_i(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_n)$ ist und $a_i a_{i+1} = l_i x l_{i+1} x = l_i l_{i+1} x^2 = 0$.

Daher ist jedes Element aus $C^{bar}_{n-1}(A)$ Zykel und der Rand ist nur die 0, woraus sich

$H^{bar}_{n-1}(A) = A^{\otimes n}$ ergibt. Analog folgt die Behauptung für $CY_n(A)$.

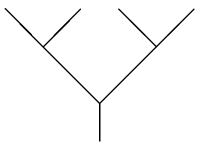
$\square$

Die Aussage des Lemmas trifft auf alle Algebren mit trivialer Multiplikation zu. Es gilt aber nicht - wie man vermuten könnte - $HY_n(A) = k[Y_n] \otimes H^{bar}_n(A)$ für beliebige assoziative Algebren.

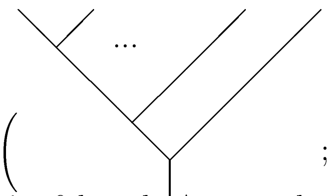
**Beispiel**
Betrachte die Algebra

$$B = k\langle x\rangle/(x^2 \otimes x - x \otimes x^2 = 0)$$

Hierbei ist $(x, x, x)$ ein Zykel für den bar-Komplex und kein Rand.

$\Big($  $; x, x, x)$ hat dagegen einen nichtverschwindenden Rand.

Man kann aber immerhin zwei Kettenabbildungen zwischen den Komplexen angeben und zwar zum einen die Projektionsabbildung von oben
1) $\varphi : (y; a_1, \cdots, a_n) \longmapsto (a_1, \cdots, a_n)$
und zum anderen eine Abbildung, die einen Term aus dem bar-Komplex mit einem bestimmten Baum versieht

2) $\psi : (a_1, \cdots, a_n) \longmapsto \Big($  $; a_1; \cdots, a_n)$

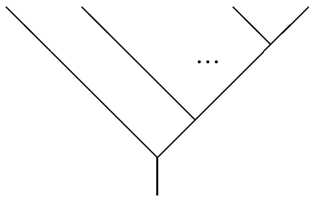
Es gilt $\varphi \circ \psi = id$, also ist folgende Aussage bewiesen:

### 1.4.2.2 Satz

$$H^{bar}_{n-1}(A) \hookrightarrow HY_n(A)$$

als direkter Summand.

**Bemerkung**
In 2) kann man auch den Baum



nehmen, wichtig ist nur, daß $\theta_i = \theta_j$ für alle $i$ und $j$ gilt.

## 1.5 Homologie mit Koeffizienten

### 1.5.1 Darstellungen und Kodarstellungen von Dialgebren

Koeffizienten für die Homologie bzw. Kohomologie werden gefunden, indem man fordert, daß die Koeffizienten der Kohomologie ein Linksmodul der universellen einhüllenden assoziativen Algebra U(D) sind und die Koeffizienten der Homologie ein U(D)-Rechtsmodul. Dieses Vorgehen ist analog zu dem von Jean-Louis Loday und Timurash Pirashvili in [L-P]. Alessandra Frabetti hat dieses Vorgehen auf die Homologietheorie von Dialgebren angewandt (s. [F-2]).

#### 1.5.1.1 Definition

Sei $D$ eine Dialgebra. Ein $k$-Vektorraum $M$ ist eine **Darstellung**, wenn es zwei lineare Abbildungen
$\dashv, \vdash$: $M \otimes D \to M$
$\dashv, \vdash$: $D \otimes M \to M$ gibt, welche die Axiome einer Dialgebra erfüllen, wenn zwei Faktoren aus $D$ und ein Faktor aus $M$ ist.

**Beispiel**
$H$ sei Untergruppe von $G$ und $I_H$ sei das Auswertungsideal.
Dann wird $k[H] \otimes I_H$ zu einer Dialgebra, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}(h_1, i_1) \vdash (h_2, i_2) &:= (h_1 i_1 h_2, i_2)\\ (h_1, i_1) \dashv (h_2, i_2) &:= (h_1, i_1 h_2 i_2)\end{aligned}$$

Dieses Beispiel hat Loday in [L-3] erwähnt.

Des weiteren ist aber $k[G] \otimes I_G$ eine Darstellung von $k[H] \otimes I_H$, indem man $k[H] \otimes I_H$ auf $k[G] \otimes I_G$ wie folgt operieren läßt:

$$
\begin{aligned}
(h_1,i_1)\vdash(g_2,j_2) &:= (h_1 i_1 g_2, j_2)\\
(h_1,i_1)\dashv(g_2,j_2) &:= (h_1, i_1 g_2 j_2)\\
(g_1,j_1)\vdash(h_2,i_2) &:= (g_1 j_1 h_2, i_2)\\
(g_1,j_1)\dashv(h_2,i_2) &:= (g_1, j_1 h_2 i_2)
\end{aligned}
$$

#### 1.5.1.2 Definition

Eine **Kodarstellung** einer Dialgebra $D$ ist ein $k$-Vektorraum $N$ mit jeweils zwei Abbildungen

$$
\begin{aligned}
\vdash,\dashv \quad &: D\otimes N \longrightarrow N\\
\vdash,\dashv \quad &: N\otimes D \longrightarrow N
\end{aligned}
$$

die folgende Axiome erfüllen:

$$
\begin{array}{llclcl}
(1) & n\dashv(x\dashv y) & = & (n\dashv y)\dashv x & = & n\dashv(x\vdash y)\\
(2) & (n\dashv y)\vdash x & = & n\vdash(x\dashv y) & & \\
(3) & (n\vdash y)\vdash x & = & (n\vdash y)\dashv x & = & n\vdash(x\vdash y)\\
(4) & (x\dashv n)\dashv y & = & x\dashv(n\dashv y) & = & (x\dashv n)\vdash y\\
(5) & x\vdash(n\dashv y) & = & (x\vdash n)\dashv y & & \\
(6) & x\vdash(n\vdash y) & = & x\dashv(n\vdash y) & = & (x\vdash n)\vdash y\\
(7) & y\dashv(x\dashv n) & = & (x\dashv y)\dashv n & = & y\vdash(x\dashv n)\\
(8) & (x\vdash y)\dashv n & = & y\dashv(x\vdash n) & & \\
(9) & (x\vdash y)\vdash n & = & (x\dashv y)\vdash n & = & y\vdash(x\vdash n)
\end{array}
$$

**Bemerkung**
Die obigen Axiome kann man einfach aus der Bedingung ausrechnen, daß eine Kodarstellung einer Dialgebra $D$ ein $U(D)$-Rechtsmodul ist.

### 1.5.2 Homologie mit Koeffizienten

Der Kettenkomplex für die Homologie einer Dialgebra $D$ mit Koeffizienten in einer Kodarstellung $N$ wird dann wie folgt definiert:

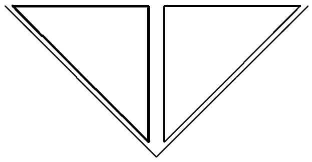
$$
\begin{aligned}
CZ_n(D,N) &:= k[Y_n]\otimes N\otimes D^{\otimes n}\\
HZ_n(D,N) &:= H_n(CZ(D,N),d)
\end{aligned}
$$

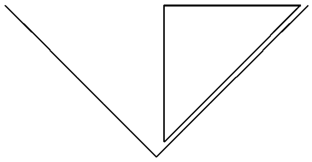
wobei $d := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$ und die $d_i$ von folgender Gestalt sind:

$$
d_i(y;a_0,\cdots,a_n) = \begin{cases} (\theta_0(y); a_1 \circ_0^y a_0,\cdots,a_n) & , \quad i=0\\ (\theta_i(y); a_0,\cdots,a_i\circ_i^y a_{i+1},\cdots,a_n) & , \quad i=1,\ldots,n-1\\ (\theta_n(y); a_0\circ_n^y a_n,\cdots,a_{n-1}) & , \quad i=n \end{cases}
$$

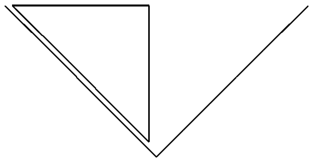
wobei $a_0 \quad \in N$ und

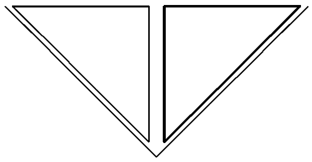
$$\circ_0^y = \begin{cases} \vdash \ , & y = \\ \dashv \ , & y = \end{cases}$$

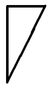
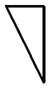
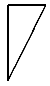
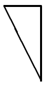




$$\circ_n^y = \begin{cases} \vdash \ , & y = \\ \dashv \ , & y = \end{cases}$$





Dabei bedeuten die dickgedruckten Baumhälften  und  , daß sich in diesem Teil des Baumes auf jeden Fall Blätter befinden während  und  heißt, daß es auf dieser Seite des Baumes nicht notwendig Blätter geben muß.

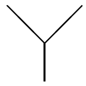
#### 1.5.2.1 Proposition

Alessandra Frabetti hat in der Arbeit „Dialgebra homology of associative algebras" gezeigt, daß die Hochschildhomologie einer unitären assoziativen Algebra $A$ mit Koeffizienten in einem $A$-Bimodul $M$ mit der Dialgebra-Homologie übereinstimmt.

$$H_n(A, M) = HY_n(A, M)$$

### 1.5.3 Untersuchung der simplizialen Struktur von CY(D)

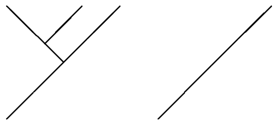
Der Hochschildkomplex einer assoziativen Algebra mit den Ausartungs- und Seitenabbildungen ist ein simplizialer Komplex. Erweitert man die Theorie auf die Dialgebren, indem man einen Randoperator analog zum Hochschildrand konstruiert, so ist zu erwarten, daß sich wenigstens ein Teil der simplizialen Struktur überträgt. Probleme sind allenfalls im Zusammenhang mit den Bäumen zu erwarten - leider treten sie auch wirklich auf. Die Seitenabbildungen $b_i$ und die Ausartungsabbildungen $s_i$ des Hochschildkomplexes haben zwar Hochhebungen in den Komplex der Dialgebren, aber diese erfüllen nicht alle Axiome eines simplizialen Komplexes. Der Kettenkomplex für Dialgebren ist nur noch pseudo-simplizial, d.h. es fehlt die Gültigkeit der Gleichung $\tilde{s}_i\tilde{s}_i = \tilde{s}_{i+1}\tilde{s}_i$ für die Ausartungsabbildungen.

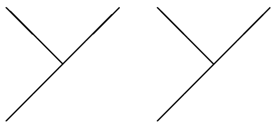
Sei $s_i : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ die Abbildung, die das $i$-te Blatt durch  ersetzt. Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur den Komplex der Bäume.

#### 1.5.3.1 Satz

$(k[Y_n], \theta, s)$ ist für sich genommen ein pseudo-simplizialer, azyklischer Komplex.

**Bemerkung**
Es gilt nicht $s_i s_i = s_{i+1}s_i$. Es ist z.B.

$s_i s_i(//) =$  aber

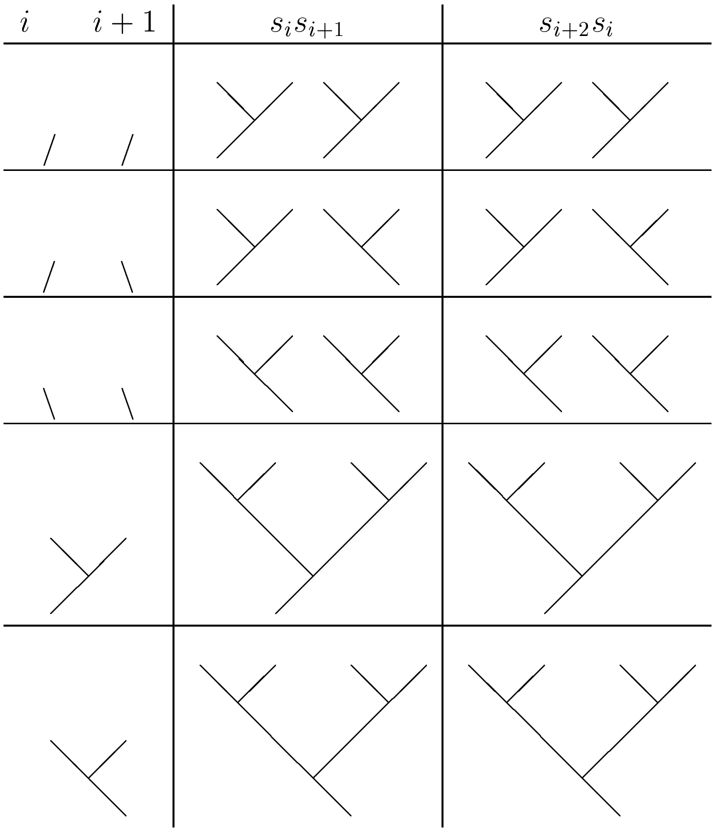
$s_{i+1}s_i(//) =$ 

Also ist $k[Y_n]$ <u>kein</u> simplizialer Komplex.

**Beweis des Satzes**
Es gilt:

$$\begin{array}{rrcl}
a) & \theta_i\theta_j & = & \theta_{j-1}\theta_i \\
b) & s_i s_j & = & s_{j+1}s_i \text{ für } 0 \leq i < j \leq n-1 \\
c) & \theta_i s_j & = & \left\{ \begin{array}{rcl} s_{j-1}\theta_i & : & i < j \\ id & : & i = j, i = j+1 \\ s_j\theta_{i-1} & : & i > j+1 \end{array} \right.
\end{array}$$

a) wurde schon bewiesen, als gezeigt wurde, daß die Abbildung d des Kettenkomplexes einer Dialgebra ein Rand ist.
b) ist klar, bis auf den Fall j = i+1




Die Aussagen in c) folgen direkt aus der Definition der Abbildungen $s_i$. Die Azyklizität des Komplexes folgt daraus, daß $s_0$ eine Kettenhomotopie zwischen $-id$ und der 0 ist. Der Beweis wurde schon geführt, als gezeigt wurde, daß die Homologie für unitäre Dialgebren verschwindet:
Es gilt

$$\begin{aligned} d_1 s_0 &= \mathrm{id} \\ d_{i+1} s_0 &= s_0 d_i \quad \text{für} \quad i \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad ds_0 + s_0 d = id$$

$\square$

## 1.6 Morita-Invarianz für Dialgebren

Im Gegensatz zur Hochschildtheorie gilt Morita-Invarianz nicht für beliebige Koeffizienten, sondern man muß die Koeffizienten einschränken, um die Gleichheit der Homologie einer Dialgebra und ihrer Matrizendialgebra zu erhalten. Ähnlich wie in einem der vorigen Sätze, der besagte, daß die Homologie von unitären Dialgebren verschwindet, kann man auch hier den Beweis aus der Hochschildtheorie leicht variiert übernehmen. Die präsimpliziale Kettenhomotopie auf dem

Tensoranteil (siehe [L-1] Seite 17) muß auf den Bäumen fortgesetzt werden. Doch zunächst muß geklärt werden, welche Koeffizienten sich eignen.

In [F-2] wird gezeigt, daß es zu einer gegebenen Darstellung $M$ einer Dialgebra $D$ eine Kodarstellung $M^{op}$ gibt, indem man die Verknüpfungen $\vdash$ und $\dashv$ für alle $a$ aus $D$ und alle $m$ aus $M^{op}$ folgendermaßen festlegt:

$$m \dashv^{op} a := a \vdash m =: m \vdash^{op} a$$

$$a \dashv^{op} m := m \dashv a =: a \vdash^{op} m$$

Hat man Koeffizienten aus $M^{op}$, vereinfachen sich die Randterme:

$$d_i(y; a_0, \cdots, a_n) := \theta_i(y) \otimes \begin{cases} (a_0 \dashv a_1, \cdots, a_n) & , \quad i = 0 \\ (a_0, \cdots, a_i \circ_i^y a_{i+1}, \cdots, a_n) & , \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ (a_n \vdash a_0, \cdots, a_{n-1}) & , \quad i = n \end{cases}$$

### 1.6.0.2 Proposition

Mit diesen Koeffizienten ist der Kettenkomplex $CY(D, D^{op})$ einer unitären Dialgebra zumindest ein pseudo-simplizialer Komplex, wenn man die Ausartungsabbildung aus der Hochschildtheorie hochhebt:

$$S_i(y; a_1, \ldots, a_n) := (s_i(y); a_1, \ldots, a_i, e, \ldots, a_n)$$

**Beweis**
Da man bei dem Baum das $i$-te Blatt durch zwei Blätter ersetzt, die ein " $\bigvee$ " bilden, steht die Einheit $e$ immer auf der richtigen Seite. Damit sind alle Gleichungen für die Pseudo-Simplizialität erfüllt. $\square$

### 1.6.0.3 Theorem

**Morita-Invarianz**

Sei $D$ eine Dialgebra und $N = M^{op}$ die oppositionelle Kodarstellung einer Darstellung $M$. Die Einheit der Dialgebra $1_D$ operiere als Einheit auf $M^{op}$. Dann gilt:

$$HY_n(M_r(D), M_r(M^{op})) \cong HY_n(D, M^{op}) \qquad \forall r$$

Der Beweis benutzt die verallgemeinerte Spur wie der Beweis der Morita- Invarianz der Hochschild-Homologie. Zuerst muß man also nachweisen, daß die verallgemeinerte Spur und die Inklusion mit den Rändern vertauschen:

**Lemma**

Die Inklusion und die Spur seien wie in [L-1] definiert:

$inc_\bullet(y;a_0,\ldots,a_n) := (y;E_{1,1}(a_0),\ldots,E_{1,1}(a_n))$
$tr_\bullet(y;\alpha_0,\ldots,\alpha_n) := (y;\sum \alpha^0_{j_0j_1}\otimes\cdots\otimes\alpha^n_{j_nj_0})$
Behauptung: $inc_\bullet$ und $tr_\bullet$ sind Abbildungen von Kettenkomplexen.

**Beweis des Lemmas**

Für $inc_\bullet$ ist die Behauptung offensichtlich. Für die Abbildung $tr_\bullet$ folgt die Behauptung nach einer ,kleinen 'Rechnung:

$$d_j tr_\bullet(y;\alpha^0,\ldots,\alpha^n) = \begin{cases} (\theta_0(y);\sum \alpha^0_{i_0i_1}\dashv\alpha^1_{i_1i_2},\ldots,\alpha^n_{i_ni_0}) & , \ j=0 \\ (\theta_n(y);\sum \alpha^n_{i_ni_0}\vdash\alpha^0_{i_0i_1},\ldots,\alpha^{n-1}_{i_{n-1}i_n}) & , \ j=n \\ (\theta_j(y);\sum \alpha^0_{i_0i_1},\ldots,\alpha^j_{i_ji_{j+1}}\circ^y_j\alpha^{j+1}_{i_{j+1}i_{j+2}},\ldots,\alpha^n_{i_ni_0}) & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$tr_\bullet d_j(y;\alpha^0,\ldots,\alpha^n) = \begin{cases} tr_\bullet(\theta_0(y);\alpha^0\dashv\alpha^1,\ldots,\alpha^n) & , \ j=0 \\ tr_\bullet(\theta_n(y);\alpha^n\vdash\alpha^0,\ldots,\alpha^{n-1}) & , \ j=n \\ tr_\bullet(\theta_j(y);\alpha^0,\ldots,\alpha^j\circ^y_j\alpha^{j+1},\ldots,\alpha^n) & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

Die Gleichheit wird hier nur exemplarisch für i = n bewiesen:

$$\begin{aligned} & tr_\bullet(\theta_n(y);\alpha^n\vdash\alpha^0,\ldots,\alpha^{n-1}) \\ & \quad = (\theta_n(y);\textstyle\sum_{j_0,\ldots,j_{n-1}}(\alpha^n\vdash\alpha^0)_{j_0j_1}\otimes\ldots\otimes\alpha^{n-1}_{j_{n-1}j_0}) \\ & \quad = (\theta_n(y);\textstyle\sum_{j_0,k,\ldots,j_{n-1}}(\alpha^n_{j_0k}\vdash\alpha^0_{kj_1})_{j_0j_1}\otimes\ldots\otimes\alpha^{n-1}_{j_{n-1}j_0}) \end{aligned}$$ □

**Beweis des Theorems**

1) Es ist offensichtlich

$$tr_\bullet\circ inc_\bullet = id$$

2) Behauptung:

H:= $\sum_{i=1}^n(-1)^i h_i : CY_n(M_r(D),M_r(M^{op}) \to CY_{n+1}(M_r(D),M_r(M^{op}))$
ist präsimpliziale Homotopie

$$inc_\bullet\circ tr_\bullet \simeq id$$

wobei

$$\begin{aligned} & h_i(y;\alpha_0,\ldots,\alpha_n) := \\ & \quad (s_i(y);\textstyle\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes E_{1,1}(\alpha^1_{kl})\otimes\ldots\otimes E_{1,1}(\alpha^i_{pq})\otimes E_{1q}(1_D)\otimes\alpha^{i+1}\otimes\ldots\otimes\alpha^n) \end{aligned}$$

Nachzuweisen sind die Eigenschaften einer präsimplizialen Homotopie:
a)

$$d_0h_0 = id$$

$$
\begin{aligned}
& d_0 h_0(y;\alpha^0,\cdots,\alpha^n) \\
&\quad = \quad d_0(s_0(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes E_{1k}(1_D)\otimes\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = \quad (\theta_0 s_0(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\dashv E_{1k}(1_D)\otimes\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = \quad (y;\alpha^0,\ldots,\alpha^n)
\end{aligned}
$$

b)

$$d_{n+1}h_n = (inc\circ tr)_\bullet$$

$$
\begin{aligned}
& d_{n+1}h_n(y;\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = \quad d_{n+1}(s_n(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{11}(\alpha^n_{pq})\otimes E_{1q}(1_D)) \\
&\quad = \quad (\theta_{n+1}s_n(y);\sum E_{1q}(1_D)\vdash E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{11}(\alpha^n_{pq})) \\
&\quad = \quad (inc\circ tr)_\bullet(y;\alpha^0,\ldots,\alpha^n)
\end{aligned}
$$

c)

$$d_i h_i = d_i h_{i-1} \text{ für } i\le n$$

$$
\begin{aligned}
& d_i h_i(y;\alpha^0,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = \quad d_i(s_i(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{11}(\alpha^i_{pq})\otimes E_{1q}(1_D)\otimes\alpha^{i+1}\otimes\ldots\otimes\alpha^n)) \\
&\quad = \quad (\theta_i s_i(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{1q}(\alpha^i_{pq})\otimes\alpha^{i+1}\otimes\ldots\otimes\alpha^n))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& d_i h_{i-1}(y;\alpha^0,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = \quad d_i(s_{i-1}(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{11}(\alpha^{i-1}_{rp})\otimes E_{1p}(1_D)\otimes\alpha^i\otimes\ldots\otimes\alpha^n)) \\
&\quad = \quad (\theta_i s_{i-1}(y);\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{1p}(\alpha^i_{qp})\otimes\alpha^{i+1}\otimes\ldots\otimes\alpha^n))
\end{aligned}
$$

d.h. zu zeigen ist $\theta_i s_{i-1} = \theta_i s_i$.
Das folgt aber daraus, daß $k[Y_n]$ ein pseudo-simplizialer Komplex ist.

d)

$$d_i h_j = h_{j-1}d_i \text{ für } i<j\le n$$

Dies gilt sicher, wenn $j\neq i+1$, d.h. es ist nur der Fall j = i+1 zu untersuchen.

$$
\begin{aligned}
& d_i h_{i+1}(y;\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = (\theta_i s_{i+1}(y);\textstyle\sum E_{j1}(\alpha^0_{jk})\otimes\ldots\otimes E_{11}(\alpha^i_{rp})\circ^y_i E_{11}(\alpha^{i+1}_{pq})\otimes\ldots\otimes\alpha^n) \\
& h_i d_i(y;\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \\
&\quad = h_i(\theta_i(y);\alpha^0,\ldots,\alpha^i\circ^y_i\alpha^{i+1},\ldots,\alpha^n)
\end{aligned}
$$

$$= (s_i\theta_i(y); \sum E_{j1}(\alpha^0_{jk}) \otimes \ldots \otimes E_{11}((\alpha^i \circ^y_i \alpha^{i+1})_{rq}) \otimes \cdots \otimes \alpha^n)$$

Daß die Terme im Tensorprodukt übereinstimmen folgt direkt. Zu zeigen ist lediglich $s_i\theta_i = \theta_i s_{i+1}$.

Das gilt aber wiederum, weil hier ein pseudo-simplizialer Komplex vorliegt.
e)

$$d_i h_j = h_j d_{i-1} \quad \text{für } i > j+1$$

$$\begin{aligned} &h_j d_{i-1}(y; \alpha^0, \ldots, \alpha^n) \\ &= (s_j\theta_{i-1}(y); \sum \alpha^0 \otimes \ldots \otimes \alpha^{j+1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i-1} \circ^y_i \alpha^i \otimes \ldots \otimes \alpha^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &d_i h_j(y; \alpha^0, \ldots, \alpha^n) \\ &= (\theta_i s_j(y); \sum \alpha^0 \otimes \ldots \otimes \alpha^{j+1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i-1} \circ^y_i \alpha^i \otimes \ldots \otimes \alpha^n) \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also

$$\theta_i s_j(y) = s_j \theta_{i-1}(y).$$

Dies gehört aber ebenfalls zu den Eigenschaften eines pseudo-simplizialen Komplexes. Also ist H eine präsimpliziale Homotopie.

□

## 1.7 Operade der Dialgebren

### 1.7.1 Grundbegriffe der Operadentheorie

Der Begriff der Operade wurde zum ersten Mal von Peter May in dem Lecture Notes Band „The Geometry of Iterated Loop Spaces" [M] im Jahr 1972 eingeführt. Mays Interesse bestand darin, mit Hilfe der Operaden Ergebnisse in der Homotopietheorie zu erzielen.

Victor Ginzburg und Mikhail Kapranov setzen in ihrer Arbeit „Koszul Duality for Operads" [G-K] andere Schwerpunkte. Sie übernehmen zwar konzeptuell die Definition von May, sie behandeln aber Operaden, die aus $k$-Vektorräumen aufgebaut sind und nicht aus kompakt erzeugten Hausdorffräumen mit Grundpunkt.

Von ihnen stammt auch der Begriff der "quadratischen Operade", einer Operade, die präsentierbar ist als Quotient der freien Operade eines $\Sigma_2$-Moduls $E$ und quadratischer Relationen $R \subset 3E \otimes E$. Für eine genaue Definition der eben genannten Begriffe siehe [G-K] Seite 228 oder [L-4] Seite 14.

Der Begriff der quadratischen Operade erfaßt die gängigsten Operaden wie z.B. die Operade der assoziativen bzw. kommutativen Algebren und die Leibniz-bzw. Lie-Algebren. Auch die hier konstruierten Operaden, die Operade der Dialgebren und später die Operade der Doppelalgebren sind quadratisch.

In der Menge der quadratischen Operaden gibt es eine wichtige Teilmenge, nämlich diejenigen, die Koszul sind. Dieser Begriff wird hier nicht definiert, sondern es wird ein Kriterium zitiert, nach dem man entscheiden kann, ob eine gegebene Operade Koszul ist. Dieses Kriterium wird auf die Dialgebra-Operade - und später auf die Doppelalgebra-Operade - angewandt, um plausibel zu machen, daß beide die Koszul-Eigenschaft besitzen.

#### 1.7.1.1 Definition

Eine $k$**-lineare Operade** $\mathcal{P}$ ist eine Folge von $k$-Vektorräumen $\{\mathcal{P}(n), \quad n \geq 1\}$ mit einer Operation der $n$-ten symmetrischen Gruppe $\Sigma_n$ auf $\mathcal{P}(n)$ für alle $n \geq 1$ und linearen Abbildungen

$$\gamma_{m_1,\ldots,m_l} : \mathcal{P}(l) \otimes \mathcal{P}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(m_l) \longrightarrow \mathcal{P}(m_1 + \cdots + m_l)$$

mit folgenden Eigenschaften:
a) Diese Verknüpfungen sollen assoziativ sein
$\forall c \in \mathcal{P}(k), d_s \in \mathcal{P}(j_s)$ und $e_t \in \mathcal{P}(i_t)$ gelte
$$\gamma(\gamma(c; d_1, \ldots, d_k); e_1, \ldots, e_j) = \gamma(c; f_1, \ldots, f_k)$$
mit $f_s = \gamma(d_s; e_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1}, \ldots, e_{j_1+\cdots+j_s})$
b) Die symmetrischen Gruppen sollen äquivariant operieren.

#### 1.7.1.2 Definition

$\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ seien Operaden.
Ein **Morphismus von Operaden** ist eine Folge von Vektorraum-Homomorphismen $\{\mathcal{P}(n) \longrightarrow \mathcal{Q}(n)\}_{n\in\mathbf{N}}$, die äquivariant bezüglich der $\Sigma_n$-Operation sind und mit den Verknüpfungen kommutieren.
**Bemerkung 1**
Um Komplikationen zu vermeiden, fordert man meistens, daß die Vektorräume $\mathcal{P}$ endlich-dimensional sind.

**Bemerkung 2**
Die obige Definition beschreibt eine Operade ohne Einheit in $\mathcal{P}(1)$. Eine Operade heißt **unitär**, wenn es ein Element $\mathbf{1}$ in $\mathcal{P}(1)$ gibt, das folgende Gleichungen erfüllt:
i) $\gamma(\mathbf{1}, d) = d \quad \forall d \in \mathcal{P}(j)$
ii)$\gamma(c, \mathbf{1}^k) = c \quad \forall c \in \mathcal{P}(k)$

**Beispiel**

**Die Endomorphismenoperade**

Sei $V$ ein $k$-Vektorraum.
$\mathcal{E}_V(n) := \text{Hom}\ (V^{\otimes n}, V)$
Die symmetrische Gruppe $\Sigma_n$ operiert durch Permutation der Argumente und die Verknüpfung ist durch Ineinanderschachtelung der Abbildungen definiert:

$$\gamma(f; g_{m_1}, \cdots, g_{m_l}) := f \circ (g_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_l})$$

für $f \in \mathcal{E}_V(l)$ und $g_{m_i} \in \mathcal{E}_V(m_i)$.
Die Einheit dieser Operade ist die identische Abbildung.

### 1.7.1.3 Definition

Sei $\mathcal{P}$ eine Operade. Eine **$\mathcal{P}$-Algebra** ist ein $k$-Vektorraum $A$ mit einem Morphismus von Operaden von $\mathcal{P}$ nach $\mathcal{E}_A$. In der Praxis ist das Vorgehen i.a. umgekehrt: Man untersucht einen bestimmten Typ von Algebren z.B. assoziative Algebren oder Lie-Algebren und möchte die zugehörige Operade finden, so daß Algebren über dieser Operade wieder Algebren vom Ausgangstyp sind.

**Beispiel**

**Die Operade für assoziative Algebren**

Für jedes $n \geq 1$ sei $As(x_1, \cdots, x_n)$ die freie assoziative Algebra in den Erzeugern $x_1, \cdots, x_n$. $As(n) \subset As(x_1, \cdots, x_n)$ sei der Unterraum der Monome, in dem jedes $x_i$ nur einmal vorkommt. Es gibt genau n! solcher Monome, nämlich $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ für alle $\sigma \in \Sigma_n$. $As(n)$ trägt damit eine kanonische $\Sigma_n$-Operation. Die Verknüpfung für die Operadenstruktur erhält man, indem man die Variablen durch Monome substituiert:

$$As(l) \otimes As(m_1) \otimes \cdots \otimes As(m_l) \longrightarrow As(m_1 + \cdots + m_l)$$

z.B. Wird $x_2x_3x_1 \otimes x_1x_2 \otimes x_2x_1x_3 \otimes x_3x_2x_4x_1$
mit $x_2x_3x_1 \otimes x_1x_2 \otimes x_4x_3x_5 \otimes x_8x_7x_9x_6$ identifiziert. Dieses Element wird dann gemäß der Anordnung der Variablen im ersten Monom auf das Element
$(x_4x_3x_5)(x_8x_7x_9x_6)(x_1x_2)$ aus $As(9)$ abgebildet.

Also ist $As(n)$ isomorph zu $k[\Sigma_n]$ also zur regulären Darstellung der symmetrischen Gruppe. Algebren über der Operade $As$ sind gerade wieder assoziative Algebren.

### 1.7.2 Die Operade der Dialgebren

#### 1.7.2.1 Satz

Die Operade der Dialgebren ist

$$\mathrm{Dias}(n) = nk[\Sigma_n]$$

**Beweis**
Die freie Dialgebra im Grad $n$ besteht gerade aus Monomen der Länge $n$ in $x_1, \cdots, x_n$. Die Monome, in denen jedes $x_i$ nur einmal vorkommt, kann man abzählen, indem man ausnutzt, daß jedes Monom in einer Dialgebra von der Form $x_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_j} \cdots x_{i_n}$ ist, so daß vor dem Index $i_j$ nur $\vdash$-Zeichen vorkommen und danach nur $\dashv$-Zeichen. Das heißt es gibt nur $n$ solcher Monome, weil es nur $n$ Möglichkeiten gibt, den Index $i_j$ zu wählen. □

Die Operade der Dialgebren hat noch eine zusätzliche Eigenschaft - sie ist Koszul. Um hier nicht unnötig viele Notationen einzuführen, geben wir keine Definition des Begriffes, sondern begnügen uns damit, ein Kriterium anzugeben, wann eine gegebene Operade Koszul ist. Nach [G-K] besteht die Motivation dafür, diesen Begriff einzuführen, im folgenden: „Most of the operads arising from nature are Koszul". Bei Ginzburg-Kapranov findet sich auch die detailliert Definition dieses Begriffes.

#### 1.7.2.2 Satz

Eine quadratische Operade ist genau dann Koszul, wenn die Homologie des Kettenkomplexes für die freie Algebra über der Operade azyklisch ist.

Um den Satz verstehen zu können, muß kurz zumindest angedeutet werden, wie dieser Kettenkomplex aussieht.
Sei $\mathcal{P}$ eine quadratische Operade, $A$ eine $\mathcal{P}$-Algebra. Weiterhin sei
$C_n^{\mathcal{P}}(A) := A^{\otimes n} \otimes_{\Sigma_n} \mathcal{P}^!(n)^\vee$

Der Ausdruck $C_n^{\mathcal{P}}(A) := A^{\otimes n} \otimes_{\Sigma_n} \mathcal{P}^!(n)^\vee$ hat dabei folgende Bedeutung:
$\mathcal{P}^!(n)$ ist die duale Operade, d.h. die Operade, die man erhält, indem man statt der ursprünglichen Relationen des Algebratyps die dualisierten verwendet. In [L-4, p.15] wird angegeben, wie man die dualen Relationen ausrechnet:
Sind

$$x(yz) = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \alpha_\sigma \sigma((xy)z)$$

die Relationen in den Algebren, wobei die $\alpha_\sigma$ Koeffizienten aus dem Körper sind, so werden daraus die dualen Relationen

$$(xy)z = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \alpha_\sigma sgn(\sigma)\sigma^{-1}(x(yz))$$

$\mathcal{P}^!(n)^\vee$ ist dann einfach der duale Modul $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}^!(n), k)$. Für die langwierige Definition des Randoperators siehe [L-4], Seite 18.

**Korollar**
Mit obigem Satz bekommen wir, daß die Operade der Dialgebren Koszul ist, weil wir mit Satz 9 wissen, daß die freie Dialgebra $TV \otimes V \otimes TV$ azyklisch ist. Man muß nur noch nachweisen, daß der Kettenkomplex der Operaden mit dem Kettenkomplex für Dialgebren übereinstimmt. Das hat Loday in [L-3] begründet. $\square$

# Kapitel 2

# Zellenkomplex der normalisierten Schlitzkonfigurationen

## 2.1 Parallelschlitzgebiete

Der Modulraum gerichteter Riemannscher Flächen $\vec{\mathcal{M}}(g)$ vom Geschlecht $g$ ist der Raum konformer Äquivalenzklassen [F,$\chi$] geschlossener Riemannscher Flächen vom Geschlecht $g$ mit einer gegebenen Richtung $\chi$ an einem festen Punkt P $\in$ F.
In [B-1] hat C.-F. Bödigheimer diesen Raum mit Hilfe von Parallelschlitzgebieten neu beschrieben.

#### 2.1.0.3 Definition

Ein **Schlitz** in **C** ist eine nach links unbegrenzte horizontale Linie, die von einem Punkt $(x_k, y_k) \in \mathbf{C}$ ausgeht.

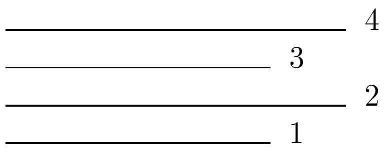
Betrachte $4g$ Schlitze $(L_1, \ldots, L_{4g})$ , die durch eine fixpunktfreie Involution $\lambda \in \Sigma_{4g}$ gepaart sind, indem $\lambda$ auf den Indizes $1, \ldots, 4g$ operiert.

#### 2.1.0.4 Definition

Eine **Parallelschlitzkonfiguration** $L$ ist eine solche Zusammenstellung $(L_1, \ldots, L_{4g}, \lambda)$, die folgende zusätzliche Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & y_k & \leq & y_{k+1} \\ 2) & x_k & = & x_{\lambda(k)} \end{array}$$

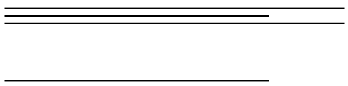
Ein Beispiel für Geschlecht g = 1 ist folgende Konfiguration:




mit $\lambda = (1\ 3)(2\ 4)$

Die obige Definition schließt nicht aus, daß ein Schlitz einen anderen enthält oder daß zwei Schlitze gleich sind.

Aus einer Parallelschlitzkonfiguration erhält man eine Fläche vom Geschlecht $\leq g$ mit einer Richtung $\chi$ , indem man die Schlitze der Nummern $k$ und $\lambda(k)$ geeignet verklebt. Für die genaue Definition siehe [B-1]. Ist das Geschlecht der entstandenen Fläche $< g$ oder hat diese Fläche Singularitäten, so heißt die Konfiguration **degeneriert**.
Um degenerierte Konfigurationen auszuschließen, fordert man:
3) $\sigma = \lambda \circ t$ mit $t(i) = i + 1 (mod 4g)$ hat nur einen Zykel.
4) Es gibt keine drei Indizes $k, k+1, k+2$ , so daß
$\lambda(k) = k+2, L_k = L_{k+2}$ und $L_{k+1} \subseteq L_k$
Ein Beispiel für eine degenerierte Konfiguration ist:



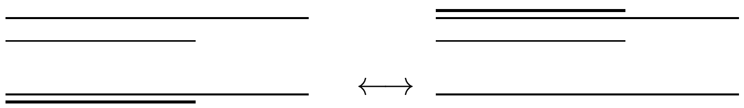
mit $\lambda = (1\ 3)(2\ 4)$

Warum dies wirklich Singularitäten und Flächen kleineren Geschlechts verhindert, siehe [B-1].

### Rauzy-Äquivalenz

Unterschiedliche Parallelschlitzkonfigurationen können konform äquivalente Flächen ergeben. Daher teilt man eine Äquivalenzrelation aus der Menge der Konfigurationen heraus.

Wenn $L_{k-1} \subseteq L_k$, dann darf der Schlitz $L_k$ über $L_{\lambda(k)}$ springen. Ein solcher Sprung heißt **Rauzy-Sprung**.



#### 2.1.0.5 Definition

Zwei Konfigurationen heißen **Rauzy-äquivalent**, wenn sie sich nur durch einen Rauzy-Sprung unterscheiden.

Eine Äquivalenzklasse von Konfigurationen wird mit $\mathcal{L} = [L_1, \ldots, L_{4g}|\lambda]$ bezeichnet und heißt **Parallelschlitzgebiet**. $PS\mathbf{C}$(g) ist die Menge aller Parallelschlitzgebiete vom Geschlecht $g$.
$\mathcal{L}$ heißt **nicht degeneriert**, wenn kein Repräsentant degeneriert ist.

Des weiteren beschränkt man sich auf die Betrachtung normierter Parallelschlitzgebiete, d.h. man fordert zusätzlich

$$\begin{array}{lrcl} 5) & y_1 & = & 0 \\ 6) & y_{4g} & = & 1 \\ 7) & min(x_k) & = & 0 \end{array}$$

Die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen Sim($\mathbf{C}$) operiert frei auf $PS\mathbf{C}$(g), d.h. diese Normierung entspricht gerade $PS\mathbf{C}$(g) / Sim($\mathbf{C}$). In [B-1] wurde gezeigt, daß der Raum aller nicht-degenerierten, normalisierten Konfigurationen $PS\mathbf{C}$(g) / Sim($\mathbf{C}$) homöomorph ist zum Modulraum $\vec{\mathcal{M}}(g)$ der gerichteten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g

$$PS\mathbf{C}(g)/Sim(\mathbf{C}) \cong \vec{\mathcal{M}}(g)$$

#### 2.1.0.6 Definition

Der Unterraum $U(g) \subset PS\mathbf{C}(g)$ besteht aus denjenigen Klassen, für die $max(x_k) = 0$ erfüllt ist, bei denen also alle Schlitze von einem $z \in \mathbf{C}$ mit verschwindendem Realteil starten.

**Kompaktifizierung**
Betrachte $\mathcal{L} \in PS\mathbf{C}(g)$ mit der Zusatzbedingung
8) $max(x_k) < 1$.
Der Raum aller $\mathcal{L}$, die 1) - 8) erfüllen, wird mit $\mathcal{P}(g)$ bezeichnet. Eine Kompaktifizierung erhält man, indem die Bedingung 8) durch
9) $max(x_k) \leq 1$ ersetzt wird und man Konfigurationen zuläßt, die 4) nicht erfüllen. Diese Kompaktifizierung wird mit $P(g)$ bezeichnet. Es gilt:

$U(g)$ ist ein Homotopieretrakt von $P(g)$

In [B-2] wurde gezeigt, daß $P(g)$ ein endlicher Zellenkomplex ist; die Zellen von $U(g)$ kann man wie folgt angeben:

$$E = [a_0, \dots, a_{n+1}|\lambda]$$

Dabei ist $a_i$ jeweils die Anzahl der Schlitze auf dem $i$-ten $y$-Level. Per definitionem gilt $\sum a_i = 4g$. Auf diesen Zellen kann man einen 'topologischen Rand' definieren(s. [B-2]). Die Seitenabbildungen des Randes addieren immer zwei benachbarte Einträge.

$\delta'_i(E) := [a_0, \dots, a_i + a_{i+1}, \dots, a_{n+1}|\lambda]$

Der Rand ist die Wechselsumme der Seitenabbildungen

$$\delta' := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta'_i$$

### 2.1.1 Variation der Homologietheorie

Eine Verallgemeinerung dieses Randoperators in Anlehnung an die Homologietheorie für Dialgebren ist möglich, indem man die Seitenabbildungen nicht immer in derselben Weise operieren läßt, sondern zwei Arten zuläßt, in der diese wirken können. Ein zusätzliches Datum entscheidet dann darüber, welche der beiden Möglichkeiten an der Stelle $i$ gewählt wird.

Die einzig mögliche Art, die Einträge $a_i$ zusammenzufassen, ist die Addition, weil die Nebenbedingung $\sum a_i = 4g$ erfüllt bleiben muß. Addiert man mehr als zwei Einträge auf einmal, so gelangt man zu schnell in den degenerierten Fall. Das bedeutet, daß eine sinnvolle Verallgemeinerung des topologischen Randes darin bestehen kann, die Elemente $a_i$ jeweils zum einen mit $a_{i+1}$, zum anderen mit $a_{i-1}$ zu summieren. Deshalb definieren wir:

$$\begin{aligned} \delta_i^{\dashv}([a_0, \dots, a_{n+1}|\lambda]) &= [a_0, \dots, a_i + a_{i+1}, \dots, a_{n+1}|\lambda] \\ \delta_i^{\vdash}([a_0, \dots, a_{n+1}|\lambda]) &= [a_0, \dots, a_{i-1} + a_i, \dots, a_{n+1}|\lambda] \end{aligned}$$

Damit kann man jetzt Seitenabbildungen angeben:

$d_i([z_1, \dots, z_n; a_0, \dots, a_{n+1}|\lambda]) = [z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n; \delta_i^{z_i}(E)]$ mit $z_i \in \{\vdash, \dashv\}$

$$\delta := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_i$$

Es gilt $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ für $i < j$ , also ist $\delta$ Rand.

Bezeichne mit $HZ(U(g))$ die Homologie dieses Komplexes. Dann gilt offensichtlich die folgende

#### 2.1.1.1 Proposition

$$H(U(g)) \hookrightarrow HZ(U(g))$$

**Beweis**
Folgende Vergißabbildung ist eine Abbildung von Kettenkomplexen
$v : [z_1, \ldots, z_n; a_0, \ldots, a_{n+1}|\lambda] \mapsto [a_0, \ldots, a_{n+1}|\lambda]$
Die Abbildung $i$, die einem Element $[a_0, \ldots, a_{n+1}|\lambda]$ das Element $[\dashv, \ldots, \dashv; a_0, \ldots, a_{n+1}|\lambda]$ zuordnet, kommutiert ebenfalls mit den Rändern, und es gilt

$$v \circ i = id$$

$\square$

**Bemerkung 1**
Ein analoges Ergebnis kann man auch für den gesamten Komplex $P(g)$ erzielen; lediglich die Notation wird dabei umfangreicher.

**Bemerkung 2**
Obiges Ergebnis liefert dann etwas, wenn man zeigen kann, da $HZ_n(U(g))$ verschwindet. Ansonsten ist $HZ(U(g))$ natürlich schwieriger auszurechnen als $H(U(g))$.

Wenn man sich die Gleichungen $d_{i-1}d_j = d_j d_i$ für $i < j$ ansieht und diese in ein abstraktes Axiomensystem überträgt, ergeben sich nicht die Axiome einer Dialgebra; es gilt z.B. nicht

$$\delta_i^{\dashv}\delta_j^{\dashv} = \delta_{j-1}^{\dashv}\delta_i^{\vdash}.$$

Stattdessen gelten Gleichungen der Form
$a * (b \circ c) = (a * b) \circ c$ mit $*, \circ \in \{\vdash, \dashv\}$ und $a, b, c$ aus einem zu wählenden Objekt. Dies führt zur Definition der Doppelalgebren im nächsten Abschnitt.

# Kapitel 3

# Doppelalgebren

## 3.1 Definition

Bei Dialgebren besteht die Schwierigkeit, daß man nur wenige Beispiele angeben kann. Schon die einfachste Art, aus einer assoziativen Verknüpfung zwei unterschiedliche Multiplikationen zu machen, nämlich durch eine abweichende Skalierung

$$\begin{array}{rcll} x \vdash y & := & \lambda xy & \qquad (*) \\ x \dashv y & := & \mu xy & \end{array}$$

führt aus der Kategorie der Dialgebren hinaus, weil die Axiome 2 und 5 einer Dialgebra nicht erfüllt sind.
Im Gegensatz zu den Dialgebren, in denen zwei unsymmetrische Axiome $a \dashv (b \dashv c) = a \dashv (b \vdash c)$ und $(a \vdash b) \vdash c = (a \dashv b) \vdash c$ gelten, sind die Axiome einer Doppelalgebra vollkommen gleichförmig. Sie bedeuten, daß Assoziativität der beiden Verknüpfungen $\vdash, \dashv$ in jeder Kombination gelten soll:

#### 3.1.0.2 Definition

Eine **Doppelalgebra** ist ein Vektorraum $D$ über einem Körper $k$ mit zwei linearen Abbildungen $\vdash$ und $\dashv \ : D \otimes D \longrightarrow D$, die folgende Axiome erfüllen:

$$\begin{array}{l} 1)\ a \vdash (b \vdash c) = (a \vdash b) \vdash c \\ 2)\ a \dashv (b \dashv c) = (a \dashv b) \dashv c \\ 3)\ a \dashv (b \vdash c) = (a \dashv b) \vdash c \\ 4)\ a \vdash (b \dashv c) = (a \vdash b) \dashv c \end{array}$$

Durch $(*)$ ist ein Beispiel einer Doppelalgebra gegeben. Weitere folgen im Abschnitt 3.2.

#### 3.1.0.3 Definition

Ein **Morphismus von Doppelalgebren** ist eine $k$-lineare Abbildung $f$, für die gilt:

$$f(a * b) = f(a) * f(b) \qquad \forall a, b \in D \quad * \in \{\vdash, \dashv\}$$

Die Doppelalgebren über einem Körper k zusammen mit den Morphismen von Doppelalgebren bilden eine Kategorie, die wir mit $\mathbf{Dopp}_k$ bezeichnen.

**Bemerkung**
Sei $(D, \vdash, \dashv)$ eine Doppelalgebra. Dann kann man eine gewöhnliche assoziative Multiplikation definieren, indem man über beide Verknüpfungen summiert.

Mit der Multiplikation $a \bullet b := a \vdash b + a \dashv b$ ist $(D, \bullet)$ eine assoziative Algebra. Die Abbildung $(D, \vdash, \dashv) \mapsto (D, \bullet)$ definiert einen Funktor von der Kategorie der Doppelalgebren in die Kategorie der assoziativen Algebren. Skaliert man diese Multiplikation zusätzlich mit $1/2$, so ist dieser Funktor linksinvers zu dem Funktor, der eine assoziative Algebra als Doppelalgebra auffaßt.

**Die freie Doppelalgebra**
Sei $V$ ein beliebiger $k$-Vektorraum. Die freie Doppelalgebra $\mathcal{FD}$(V) besteht dann aus Monomen

$$x_{i1} \circ_1 x_{i2} \circ_2 \cdots \circ_{n-1} x_{in}$$

wobei die $x_{ij}$ Elemente aus $V$ sind und $\circ_j \in \{\vdash, \dashv\}$
Damit ist die freie Doppelalgebra $\mathcal{FD}$ kanonisch graduiert:

$$\mathcal{FD}(V) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{FD}(V)_l$$

wobei $\mathcal{FD}_l$ gerade aus den Monomen der Länge l besteht.

**Spezialfall** Betrachte $V = k\langle x \rangle$, den von einem Element x frei erzeugte Vektorraum.
Setze

$y_1 := x$
$y_1^2 := x \vdash x$
$y_2 := x \dashv x$ also
$y_1^l = x^{\vdash l}$
$y_l = x^{\dashv l}$

Offensichtlich gelten in diesem Fall genau die vier folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
&(1)\ (y_1^j) \vdash y_l &&= y_1^{(j+1)} \dashv y_{l-1} \\
&(2)\ (y_1^j) \dashv y_l &&= y_1^{(j-1)} \vdash y_{l+1} \\
&(3)\ y_j \dashv y_1^l &&= y_{j+1} \vdash y_1^{(l-1)} \\
&(4)\ y_j \vdash y_1^l &&= y_{j-1} \vdash y_1^{(l+1)}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mathcal{FD}(V) = k\{y_1, y_2, \cdots\}/((1) - (4))$

#### 3.1.0.4 Definition

Eine **Lie-Algebra** ist ein $k$-Vektorraum $V$ zusammen mit einer Abbildung
$[\quad,\quad]: V \otimes V \longrightarrow V$, die folgende Gleichungen erfüllt:
$[x,x] = 0$ für alle $x \in V$
$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ für alle $x,y,z \in V$

**Lie-Klammer**
Mit der Abbildung

$$[x,y] := x \vdash y + x \dashv y - y \vdash x - y \dashv x$$

wird jede Doppelalgebra $D$ zu einer Lie-Algebra Lie($D$). Durch diese Zuordnung erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der Doppelalgebren in die Kategorie der Lie-Algebren:

$$\mathbf{Dopp_k} \longrightarrow \mathbf{Lie_k}$$

**Beweis**
$x \vdash y - y \vdash x$ und $x \dashv y - y \dashv x$ sind für sich genommen Lie-Klammern, also auch ihre Summe. $\square$

#### 3.1.0.5 Definition

Sei $g$ eine Lie-Algebra mit der Lie-Klammer $[x,y]_g$. Dann ist die **universelle einhüllende Doppelalgebra** von $g$

$\mathcal{UD}(g) := \mathcal{FD}(g)/\langle[\quad,\quad]_g = x \vdash y + x \dashv y - y \vdash x - y \dashv x\rangle$

Zu überprüfen ist, ob $\mathcal{UD}(g)$ diesen Namen auch verdient, d.h. die Behauptung der folgenden Proposition ist zu beweisen.

#### 3.1.0.6 Proposition

Der Funktor $g \mapsto \mathcal{UD}(g)$ ist linksadjungiert zum Funktor $D \mapsto$ Lie($D$)

**Beweis**
$f : g \longrightarrow$ Lie(D) sei ein Morphismus von Liealgebren.
$\exists f^* : \mathcal{FD}(g) \to$ Lie($D$), indem man $f$ so fortsetzt, daß es mit $\vdash, \dashv$ verträglich ist.
$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &f^*([x,y]_g - (x \vdash y + x \dashv y - y \vdash x - y \dashv x)) \\ &\quad= f([x,y]_g) - f(x) \vdash f(y) - f(x) \dashv f(y) + f(y) \vdash f(x) + f(y) \dashv f(x) \\ &\quad= 0 \end{aligned}$$

weil $f$ Morphismus von Liealgebren ist.
$\Longrightarrow \langle [x,y]_g = x \vdash y + x \dashv y - y \vdash x - y \dashv x\rangle =: K \subseteq \ker f^*$
$\Longrightarrow \exists \tilde{f} : \mathcal{UD}(g) \longrightarrow D$
nämlich $\tilde{f}(x+K) := f^*(x)$. $\tilde{f}$ ist ein Morphismus von Doppelalgebren und nach Konstruktion eindeutig.
Umgekehrt definiert jeder Morphismus von Doppelalgebren $h : \mathcal{UD}(g) \to D$ auf kanonische Weise einen Morphismus von Liealgebren $g \to \mathrm{Lie}(D)$

$\square$

## 3.2 Beispiele

1) Die Quantenebene

$$k_q\{x,y\} = k\{x,y\}/\langle yx = qxy\rangle$$

Definiere

$$x \vdash y = xy$$
$$x \dashv y = yx = qxy$$

Damit wird $k_q\langle x,y\rangle$ zu einer Doppelalgebra.

2) Auf ähnliche Art kann man die Matrizen über $k$ zu einer Doppelalgebra machen:
$A \vdash B := AB$
$A \dashv B := \lambda E_n AB$
wobei A,B $\in M_n$(k) und $\lambda$ ein festgewählter Wert aus dem Grundkörper ist.
Statt $\lambda E_n$ kann man auch eine beliebige andere Matrix auswählen; als Doppelalgebra muß man dann aber den Zentralisator dieser Matrix ansetzen.

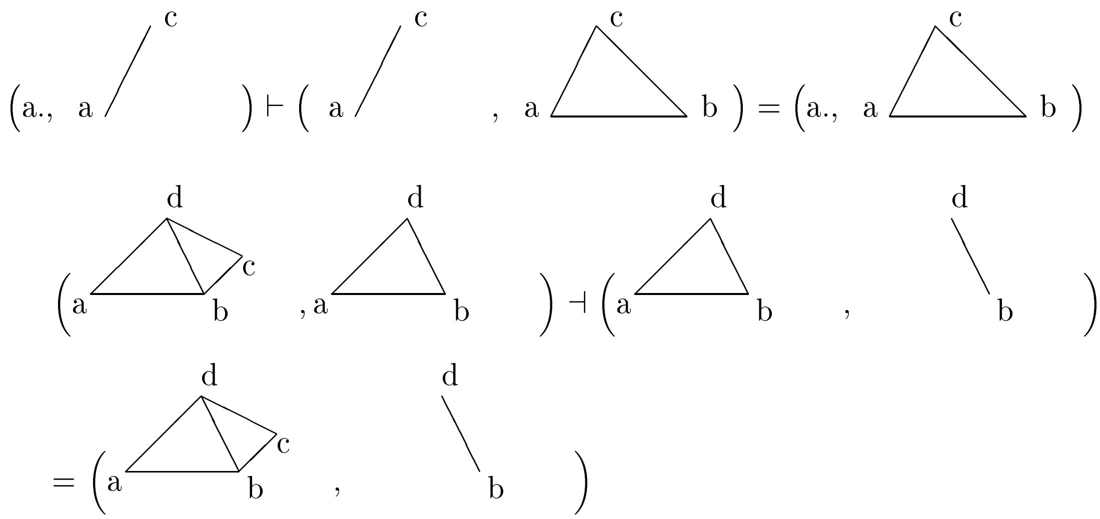
3) $D = k\langle x\rangle$ mit
$x \vdash x := x^2$
$x \dashv x := x^k$
Für eine beliebige Potenz von x ergibt sich damit:
$x^l \vdash x^m := x^{l+m}$
$x^l \dashv x^m := x^{l+m+k-2}$
Diese Beispiele haben folgendes gemeinsam: Das eine Produkt ist die herkömmliche Multiplikation, das andere ist dieselbe Multiplikation mit einem Zusatzfaktor aus dem Zentrum der Algebra.

4) **Die Gerstenhaber-Schack Doppelalgebra**
X sei ein (lokal) endlicher simplizialer Komplex und $\mathbf{K}$ ein Körper. Analog zu [G-S] kann man nun eine Doppelalgebra $\mathbf{K_X}$ definieren:

$\mathbf{K_X}$ sei erzeugt von Paaren von Simplizes (a,b), wobei entweder a $\subseteq$ b oder a $\supseteq$ b und die beiden Multiplikationen seien folgendermaßen definiert:

$$(a,b) \vdash (c,d) \quad := \quad \begin{cases} (a,d) & , \quad \text{wenn} \quad b = c, a \subseteq b, c \subseteq d \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$(a,b) \dashv (c,d) \quad := \quad \begin{cases} (a,d) & , \quad \text{wenn} \quad b = c, a \supseteq b, c \supseteq d \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$




Nachzuprüfen sind die Axiome einer Doppelalgebra:
Die Axiome (1) und (2) sind klar; die Axiome (3) und (4) gelten, weil beide Terme der Gleichung für jede Wahl der Simplizes verschwinden.

5) A sei eine Algebra, TA ihr Tensormodul. TA wird zu einer Doppelalgebra, indem man die Elemente von TA unterschiedlich weit zusammenschiebt:

Die Verknüpfung $\vdash$ multipliziere die ersten $l_1$ Elemente, die Abbildung $\dashv$ dagegen die ersten $l_2$, natürlich nur, wenn $l_1$ und $l_2$ nicht größer sind als die Länge der verknüpften Elemente.
Ist z.B. $l_1 = 2$ und $l_2 = 5$, so ergibt
$(a_1, a_2) \vdash (a_3, a_4) = (a_1a_2, a_3, a_4)$, aber $(a_1, a_2) \dashv (a_3, a_4) = (a_1a_2a_3a_4)$.

Multipliziert man die Elemente nicht von links sondern von rechts, ergibt dies ebenfalls eine Doppelalgebra-Struktur. Wichtig ist nur, daß beide Zeichen von derselben Seite aus zusammenmultiplizieren.

6)

$$TA_3 = \oplus_{i \geq 3} A^{\otimes i}$$

sei der Tensormodul einer Algebra mit Elementen der Länge $\geq 3$. Ausgehend von einem Index $i = i(n,m)$ kann man auf den Erzeugern folgende zwei Verknüpfungen angeben:

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) \dashv_i (a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}) &:= (a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+m}) \\ (a_1, \ldots, a_n) \vdash_i (a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}) &:= (a_1, \ldots, a_{i-1} a_i, \ldots, a_{n+m}) \end{aligned}$$

Für $i = n$ ergibt dies z.B. eine Doppelalgebra. Die Bedingung, daß die Elemente aus $TA_3$ sein müssen, garantiert, daß sich die beiden Verknüpfungen nicht überlappen, daher sind die Doppelalgebra-Axiome erfüllt. Möchte man mehr als zwei Elemente multiplizieren, so muß man die Mindestlänge der Elemente entsprechend erhöhen.

### 3.2.1 Der Durchschnitt von Doppel- und Dialgebren

Die assoziativen Algebren sind Beispiele dafür, daß Algebren sowohl Dialgebren als auch Doppelalgebren sein können. Liegt eine Dialgebra vor, in der zusätzlich das Axiom

$$a \dashv (b \vdash c) = (a \dashv b) \vdash c \qquad (*)$$

gilt, dann folgt:

$$a \dashv (b \dashv c) = a \dashv (b \vdash c) = (a \dashv b) \vdash c = (a \vdash b) \vdash c$$

Die zweifachen Produkte stimmen also überein. Hat die Dialgebra noch zusätzlich eine Einheit, dann sind beide Multiplikationen gleich:

$$a \dashv b = (a \dashv 1) \dashv b = (a \vdash 1) \dashv b = a \vdash (1 \vdash b) = a \vdash b$$

In diesem Fall ist die Dialgebra dann eine unitäre assoziative Algebra.

Es gibt aber Dialgebren, die das Axiom $(*)$ erfüllen und keine assoziativen Algebren sind.

**Beispiel**

Aus der Algebra $A\langle x\rangle/x^3 = 0$ kann man eine Dialgebra machen, indem man $\vdash$ und $\dashv$ folgendermaßen definiert:

$$\left.\begin{array}{rcl} x \dashv x & = & \lambda x^2 \\ x \vdash x & = & \mu x^2 \end{array}\right. \text{ mit } \lambda \neq \mu$$

Damit erfüllt diese Algebra zusätzlich zu den Dialgebra-Axiomen auch noch Axiom $(*)$, weil durch die Relation $x^3 = 0$ alle fraglichen Terme verschwinden.

### 3.2.2 Homologietheorien

Analog zur Homologietheorie für Dialgebren benötigt man einen Teil im Kettenkomplex, der einem sagt, welches Multiplikationszeichen man im Rand wählen soll. Wegen der Symmetrie der Doppelalgebra-Axiome kann man sich mit $n$-Tupeln der Zeichen $\vdash, \dashv$ begnügen. $k[Z_n]$ sei der von solchen $n$-Tupeln frei erzeugte Vektorraum. Definiere dann folgenden

**Kettenkomplex**

$$CZ_n(D) := k[Z_n] \otimes D^{\otimes n}$$

Die Seitenabbildungen vergessen einfach das $i$-te Zeichen

$\theta_i(z) := (z_1, ..., \hat{z}_i, ..., z_n)$.

Der Randoperator setzt sich dann aus einer Verbindung dieser Vergißabbildung mit den Seitenabbildungen analog zum Hochschildkomplex zusammen.

$$\begin{aligned} d &:= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} d_i \\ \text{mit } d_n(z; a_1, \ldots, a_n) &:= (\theta_n(z); a_n(z_n)a_1, \cdots, a_{n-1}) \\ \text{und } d_i(z; a_1, \ldots, a_n) &:= (\theta_i(z); a_1, \cdots, a_i(z_i)a_{i+1}, \ldots, a_n) \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \mathrm{HZ(D)} &:= H(CZ(D)_n, d) \end{aligned}$$

Möchte man für Doppelalgebren einen Kettenkomplex analog zum bar-Komplex der Hochschildtheorie definieren, so hat man zwei Möglichkeiten: Es genügen dann eigentlich $n-1$ Zeichen, um den Rand festzulegen.

$$\begin{aligned} CZ_n^{bar}(D) &:= k[Z_{n-1}] \otimes D^{\otimes n} \\ b' &:= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i d_i \\ HZ(D)_n^{bar} &:= H(CZ_n^{bar}, b') \end{aligned}$$

Möchte man aber ein Analogon zu zyklischer Homologie haben, benötigt man dagegen $n$ Zeichen, weil sich sonst keine Operation der $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ definieren läßt.

$$\begin{aligned} CZ'_n(D) &:= k[Z_n] \otimes D^{\otimes n} \\ d' &:= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1} d_i \\ HZ'_n(D) &:= H(CZ'_n(D), d') \end{aligned}$$

d.h. das letzte Zeichen $z_n$ wird für den Rand gar nicht benötigt; es ist nur aus Formatgründen vorhanden. Daß $d, b'$ und $d'$ wirklich Ränder sind, folgt leicht, weil offenbar $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ gilt für $i < j$.

**Bemerkung**

Die Definition von Doppelalgebren und die gerade definierten Kettenkomplexe sind verallgemeinerbar auf den Fall, in dem man endlich viele verschiedene Multiplikationen hat, die in einer Weise miteinander verbunden sind wie die beiden Verknüpfungen von Doppelalgebren. Definiert man zum Beispiel auf einer assoziativen Algebra $n$ verschiedene Multiplikationen, indem man das gegebene Produkt mit unterschiedlichen Skalierungen versieht, kann man eine Homologietheorie einführen, bei der man $n$- bzw.$(n-1)$- Tupel der Verknüpfungszeichen als zusätzliches Datum mitführt. Den Randoperator definiert man wie oben über die üblichen Seitenabbildungen. Viele der folgenden Ergebnisse lassen sich auf eine solche Theorie übertragen.

## 3.3 Eigenschaften der Homologie von Doppelalgebren

#### 3.3.0.1 Definition

Eine Doppelalgebra heißt **unitär**, wenn es ein Element $1_D \in D$ gibt, das die Gleichungen

$$1_D \vdash d = 1_D \dashv d = d \vdash 1_D = d \dashv 1_D = d \qquad \forall d \in D.$$

erfüllt.

**Bemerkung**
Das Einselement einer unitären Doppelalgebra ist eindeutig bestimmt.

**Beispiel**
Die Gerstenhaber-Schack Doppelalgebra ist unitär, wenn X ein endlicher simplizialer Komplex ist:

$$\sum_{a \in X} (a, a) \text{ ist das neutrale Element}$$

#### 3.3.0.2 Satz

Sei $D$ eine Doppelalgebra, die ein Element $e$ mit $e \vdash d = d \quad \forall d$ enthalte (z.B. wenn $D$ unitär ist). Dann gilt:

$$HZ'_n(D) = 0$$

und

$$HZ_n^{bar}(D) = 0$$

**Beweis**
Definiere folgende Kettenhomotopie:

$$s(z; a_1, \cdots, a_n) := -(\vdash, z; e, a_1, \cdots, a_n)$$

Es gilt $d_1 s = -id$

$$\begin{aligned} & d_i s(z; a_1, \cdots, a_n) \\ = \;& (\vdash, z_1, \cdots, \hat{z}_{i-1}, \cdots, z_{n-1}; e, a_1, \cdots, a_{i-1} z_{i-1} a_i, \cdots, a_n) \\ = \;& s d_{i-1}(z; a_1, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow sd + ds = id$ □

**Bemerkung**
Genauso wie bei den Dialgebren kann man die Voraussetzung an die Doppelalgebra abschwächen:

Wenn es für alle $a_1 \in D$ ein eindeutig bestimmbares $e(a_1)$ mit $e(a_1) \vdash a_1 = a_1$ gibt, dann gilt die Aussage des Satzes immer noch.

**Bemerkung**
Wie bei den Dialgebren ist auch das Tensorprodukt von Doppelalgebren eine Doppelalgebra; insbesondere ist die Matrizenalgebra über einer Doppelalgebra eine solche. Morita-Invarianz für unitäre Doppelalgebren läßt sich analog wie für Dialgebren zeigen.

### 3.3.0.3 Satz

**Morita-Invarianz für Matrizen über unitären Doppelalgebren**
Sei $D$ eine unitäre Doppelalgebra. Dann gilt:

$$HZ_n(D) \cong HZ_n(M_r(D))$$

**Beweis**
Im Beweis wird die verallgemeinerte Spur benutzt, die wir bereits im Beweis der Morita-Invarianz für Dialgebren verwendet haben.
1) $inc_\bullet$ und $tr_\bullet$ sind Abbildungen von Kettenkomplexen.
$inc_\bullet(z; a_1, \ldots, a_n) := (z; E_{1,1}(a_1), \cdots, E_{1,1}(a_n))$
$tr_\bullet(z; \alpha_1, \cdots, \alpha_n) := (z; \sum \alpha_{j_1 j_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_{j_n j_1})$
2) Es gilt

$$tr_\bullet \circ inc_\bullet = id$$

3) H:= $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i \otimes h_i \; : \; CZ'_n(M_r(D)) \to CZ'_{n+1}(M_r(D))$ ist präsimpliziale Homotopie, $inc_\bullet \circ tr_\bullet \simeq id$, wobei
$f_i(z) := (z_1, \ldots, z_i, z_i, \ldots, z_n)$
$h_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$\quad := (\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk}) \otimes E_{1,1}(\alpha^2_{kl}) \otimes \ldots \otimes E_{1,1}(\alpha^i_{pq}) \otimes E_{1q}(1_D) \otimes \alpha^{i+1} \otimes \ldots \otimes \alpha^n)$

Nachzuweisen sind die Eigenschaften einer präsimplizialen Homotopie:

a)

$$d_1(f_1 \otimes h_1) = id$$

$$\begin{aligned}
& d_1(f_1 \otimes h_1)(z; \alpha^1, \cdots, \alpha^n) \\
&= d_1 \left(f_1(z); \sum E_{j1}(\alpha^1_{jk}) \otimes E_{1k}(1_D) \otimes \alpha^2, \cdots, \alpha^n\right) \\
&= \left(\theta_1 f_1(z); \sum E_{j1}(\alpha^1_{jk}) \otimes \alpha^2, \cdots, \alpha^n\right) \\
&= (z; \alpha^1, \cdots, \alpha^n)
\end{aligned}$$

b)

$$d_{n+1}(f_n \otimes h_n) = (inc \circ tr)_\bullet$$

$$
\begin{aligned}
&d_{n+1}(f_n \otimes h_n)(z;\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\\
&\quad = \; d_{n+1}\Big(f_n(z);\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{11}(\alpha^n_{pq})\otimes E_{1q}(1_D)\Big)\\
&\quad = \; \Big(\theta_{n+1}f_n(z);\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{11}(\alpha^n_{pq})\Big)\\
&\quad = \; (inc\circ tr)_\bullet(z;\alpha^1,\cdots,\alpha^n)
\end{aligned}
$$

c)

$$d_i(f_i\otimes h_i) = d_i(f_{i-1}\otimes h_{i-1}) \text{ für } i\le n$$

$$
\begin{aligned}
&d_i(f_i\otimes h_i)(z;\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\\
&\quad = \; d_i\Big(f_i(z);\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{11}(\alpha^i_{pq})\otimes E_{1q}(1_D)\otimes\alpha^{i+1}\otimes\cdots\otimes\alpha^n\Big)\\
&\quad = \; \Big(\theta_i f_i(z);\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{1q}(\alpha^i_{pq})\otimes\alpha^{i+1}\otimes\cdots\otimes\alpha^n\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_i(f_{i-1}\otimes h_{i-1})(z;\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\\
&\quad = \; d_i\Big(f_{i-1}(z);\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{11}(\alpha^{i-1}_{rp})\otimes E_{1p}(1_D)\otimes\alpha^{i}\otimes\cdots\otimes\alpha^n\Big)\\
&\quad = \; \Big(\theta_i f_{i-1}(z);\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{1p}(\alpha^i_{qp})\otimes\alpha^{i+1}\otimes\cdots\otimes\alpha^n\Big)
\end{aligned}
$$

d.h. zu zeigen ist $\theta_i f_{i-1} = \theta_i f_i$.

Es treten folgende Fälle auf:

| $i-1$ | $i$ | $f_{i-1}$ | $f_i$ | $\theta_i f_{i-1}$ | $\theta_i f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash\ \vdash\ \vdash$ | $\vdash\ \vdash\ \vdash$ | $\vdash\ \vdash$ | $\vdash\ \vdash$ |
| $\vdash$ | $\dashv$ | $\vdash\ \vdash\ \dashv$ | $\vdash\ \dashv\ \dashv$ | $\vdash\ \dashv$ | $\vdash\ \dashv$ |
| $\dashv$ | $\vdash$ | $\dashv\ \dashv\ \vdash$ | $\dashv\ \vdash\ \vdash$ | $\dashv\ \vdash$ | $\dashv\ \vdash$ |
| $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv\ \dashv\ \dashv$ | $\dashv\ \dashv\ \dashv$ | $\dashv\ \dashv$ | $\dashv\ \dashv$ |

d)

$$d_i(f_j\otimes h_j) = (f_{j-1}\otimes h_{j-1})d_i \text{ für } i<j\le n$$

Dies gilt sicher, wenn $j\neq i+1$, d.h. es ist nur dieser Fall zu untersuchen

$$
\begin{aligned}
&d_i(f_{i+1}\otimes h_{i+1})(z;\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\\
&\qquad = \Big(\theta_i f_{i+1}(z);\textstyle\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{11}(\alpha^i_{rp})\circ^z_i E_{11}(\alpha^{i+1}_{pq})\otimes\cdots\otimes\alpha^n\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(f_i\otimes h_i)d_i(z;\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\\
&\quad = (f_i\otimes h_i)(\theta_i(z);\alpha^1,\cdots,\alpha^i\circ^z_i\alpha^{i+1},\cdots,\alpha^n)\\
&\quad = \Big(f_i\theta_i(z);\textstyle\sum E_{j1}(\alpha^1_{jk})\otimes\cdots\otimes E_{11}((\alpha^i)\circ^z_i E_{11}(\alpha^{i+1})_{rq})\otimes\cdots\otimes\alpha^n\Big)
\end{aligned}
$$

Daß die Terme im Tensorprodukt übereinstimmen ist eine einfache Rechnung. Zu zeigen ist lediglich $f_i\theta_i = \theta_i f_{i+1}$

| $i$ | $i+1$ | $\theta_i$ | $f_i\theta_i$ | $f_{i+1}$ | $\theta_i f_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash \ \vdash$ | $\vdash \ \vdash \ \vdash$ | $\vdash \ \vdash$ |
| $\vdash$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv \ \dashv$ | $\vdash \ \dashv \ \dashv$ | $\dashv \ \dashv$ |
| $\dashv$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash \ \vdash$ | $\dashv \ \vdash \ \vdash$ | $\vdash \ \vdash$ |
| $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv \ \dashv$ | $\dashv \ \dashv \ \dashv$ | $\dashv \ \dashv$ |

e)

$$d_i(f_j \otimes h_j) = (f_j \otimes h_j)d_{i-1} \quad \text{für } i > j+1$$

$$\begin{aligned} & d_i(f_j \otimes h_j)(z; \alpha^1, \cdots, \alpha^n) \\ = \ & \Big(\theta_i f_j(z); \sum \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i-1} \circ_i^z \alpha^i \otimes \cdots \otimes \alpha^n\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (f_j \otimes h_j)d_{i-1}(z; \alpha^1, \cdots, \alpha^n) \\ = \ & \Big(f_j\theta_{i-1}(z); \sum \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i-1} \circ_i^z \alpha^i \otimes \cdots \otimes \alpha^n\Big) \end{aligned}$$

d.h. zu zeigen ist $f_j\theta_{i-1} = \theta_i f_j$.
Dies ist wiederum klar, wenn i und j weit genug auseinander liegen.

Zu untersuchen ist nur der Fall $i = j+2$ :

| $j$ | $j+1$ | $\theta_{j+1}$ | $f_j\theta_{j+1}$ | $f_j$ | $\theta_{j+2}f_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash \ \vdash$ | $\vdash \ \vdash \ \vdash$ | $\vdash \ \vdash$ |
| $\vdash$ | $\dashv$ | $\vdash$ | $\vdash \ \vdash$ | $\vdash \ \vdash \ \dashv$ | $\vdash \ \vdash$ |
| $\dashv$ | $\vdash$ | $\dashv$ | $\dashv \ \dashv$ | $\dashv \ \dashv \ \vdash$ | $\dashv \ \dashv$ |
| $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv \ \dashv$ | $\dashv\dashv \ \dashv$ | $\dashv \ \dashv$ |

Also erfüllt $H$ alle Eigenschaften einer präsimplizialen Homotopie

□

Den Kettenkomplex $(CZ(D), d)$ kann man mit der Hochschildhomologie vergleichen, wenn man die Homologie von assoziativen Algebren untersucht. Wendet man die Doppelalgebra-Homologie auf unitäre assoziative Algebren an, so werden die entstehenden Homologiegruppen zumindest nicht komplizierter.

#### 3.3.0.4 Satz

Es sei $A$ eine unitäre, assoziative Algebra. Dann gilt:

$$HH_n(A) = HZ_{n+1}(A)$$

**Beweis**
Wie in der Homologietheorie für Dialgebren gibt es Abbildungen
$$C_n(A) \longleftrightarrow C_{n+1}(A)$$

und zwar
$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & C_{n+1}(A) & \longrightarrow & C_n(A) \\ & (z; a_0, \cdots, a_n) & \mapsto & (a_0, \cdots, a_n) \\ \psi: & C_n(A) & \longrightarrow & C_{n+1}(A) \\ & (a_0, \cdots, a_n) & \mapsto & (\vdash, \cdots, \vdash; a_0, \cdots, a_n) \end{array}$$

Es gilt $\varphi \circ \psi = id$ d.h. zu zeigen ist $\psi \circ \varphi \simeq id$.
Dafür kann man folgende präsimpliziale Kettenhomotopie definieren:
$$H := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_i$$
mit $h_i(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n) := (\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{i+1}, z_i, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_i, 1, \cdots, a_n)$
Es sind die Eigenschaften einer präsimplizialen Homotopie nachzuprüfen.
a) $d_0 h_0 = id$ ist offensichtlich

b) $d_{n+1} h_n = \psi \circ \varphi$
$d_{n+1} h_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$
$= d_{n+1}(\vdash, \cdots, \vdash; a_0, \cdots, a_n, 1)$
$= (\vdash, \cdots, \vdash; a_0, \cdots, a_n)$
$= \psi \circ \varphi(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$

c) $d_i h_j = h_{j-1} d_i$ für $i < j$ :
$d_i h_j(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$
$= d_i(\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{j+1}, z_j, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_j, 1, \cdots, a_n)$
$= (\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{j}, z_j, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_j, 1, \cdots, a_n)$
$= h_{j-1} d_i(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$

d) $d_i h_i = d_i h_{i-1}$
$d_i h_i(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$
$= d_i(\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{i+1}, z_i, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_i, 1, \cdots, a_n)$
$= (\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{i}, z_i, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$

$d_i h_{i-1}(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$
$= d_i(\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{i}, z_i, \cdots, z_n; a_1, \cdots, a_{i-1}, 1, \cdots, a_n)$
$= (\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{i}, z_i, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$

e) $d_i h_j = h_j d_{i-1}$ für $i > j + 1$

$d_i h_j(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$
$= d_i(\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{j+1}, z_j, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_j, 1, \cdots, a_n)$
$= (\underbrace{\vdash, \cdots, \vdash}_{j+1}, z_j, \cdots, \hat{z}_{i-1}, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_j, 1, \cdots, a_{i-1}a_i, \cdots, a_n)$
$= h_j d_{i-1}(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)$ $\square$

Berechnet man die Dialgebra-Homologie von assoziativen Algebren, so bekommt man eine Einbettung der bar-Homologie. Für Doppelalgebren erhält man dasgleiche Ergebnis:

### 3.3.0.5 Proposition

Für eine assoziative Algebra $A$ erhält man folgende spaltende Einbettung:

$$H_n^{bar}(A) \hookrightarrow HZ_{n+1}^{bar}(A)$$

**Beweis**
Für ein Element aus dem bar-Komplex von $A$ erhält man eine Einbettung in den Kettenkomplex für Doppelalgebren:

$$(a_0, \ldots, a_n) \mapsto (\vdash, \ldots, \vdash; a_0, \ldots, a_n)$$

Die Vergißabbildung

$$(z_0, \ldots, z_{n-1}; a_0, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_n)$$

ist dazu linksinvers. $\square$

### 3.3.0.6 Satz

Die freie Doppelalgebra ist azyklisch bezüglich der bar-Homologie für Doppelalgebren, d.h.

$$HZ_n^{bar}(\mathcal{FD}(V)) = \begin{cases} V & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$$

**Beweis**
Die 0-te Homologie ergibt $V$, weil alle 0-Ketten Zykel sind und nur die Monome mit Länge $\geq 2$ als Ränder auftreten. Für den Fall $n > 0$ kann man folgende Kettenhomotopie von der Identität zur 0 angeben:

Sei $\alpha$ ein Element aus $CZ_n(D)$ gegeben: $\alpha = (z_1, \cdots, z_{n-1}; v_1, \cdots, v_n)$

Fall 1: $v_n$ hat mindestens Länge zwei. Dann können wir $v_n$ schreiben als $v_n = \tilde{v}_n z v$. Definiere dann

$$H(z_1, \cdots, z_{n-1}; v_1, \cdots, v_n) := (-1)^{n+1}(z_1, \cdots, z_{n-1}, z; v_1, \cdots, \tilde{v}_n, v)$$

In diesem Fall gilt $b'H + Hb' = id$ :

$$\begin{aligned}
&(b'H + Hb')(\alpha) = \\
&\quad b'(-1)^{n+1}(z_1, \cdots, z_{n-1}, z; v_1, \cdots, \tilde{v}_n \otimes v) \\
&\quad +H(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(z_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_{n-1}; v_1, \cdots, v_i z_i v_{i+1}, \cdots, v_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(-1)^{n+1}(z_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_{n-1}, z; v_1, \cdots, v_i z_i v_{i+1}, \cdots, \tilde{v}_n \otimes v) \\
&\quad +(-1)^n(-1)^{n+1}(z_1, \cdots, z_{n-1}; v_1, \cdots, v_n) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(-1)^n(z_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_{n-1}, z; v_1, \cdots, v_i z_i v_{i+1}, \cdots, \tilde{v}_n \otimes v) \\
&\quad = \alpha
\end{aligned}$$

Fall 2: Sei $v_n$ ein Element aus $V$, d.h. $v_n$ habe Länge 1. Setze in diesem Fall einfach $H = 0$. Dann ist ebenfalls die Gleichung $b'H + Hb' = id$ erfüllt, weil lediglich der Term $H(-1)^{n-1}d_{n-1}$ übrigbleibt. Dieser ergibt wiederum die Identität.

□

### 3.3.1 CZ(D) als simplizialer Komplex

Während beim Kettenkomplex der Dialgebren schon allein auf den Bäumen nur eine pseudo-simpliziale Struktur vorliegt, so überträgt sich die simpliziale Struktur des Kettenkomplexes der Hochschildtheorie vollständig auf den Komplex für Doppelalgebren.

#### 3.3.1.1 Satz

$(k[Z_n], \theta, f)$ ist ein simplizialer Komplex und azyklisch

**Beweis**
$f_i : Z_n \longrightarrow Z_{n+1}$ sei die Abbildung, die den $i$-ten Eintrag $z_i$ durch $z_i, z_i$ ersetzt. Dann gilt:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \theta_i\theta_j & = & \theta_{j-1}\theta_i \\
b) & f_i f_j & = & f_{j+1}f_i \text{ für } 0 \leq i \leq j \leq n-1 \\
c) & \theta_i f_j & = & \begin{cases} f_{j-1}\theta_i & : \quad i < j \\ id & : \quad i = j, i = j+1 \\ f_j\theta_{i-1} & : \quad i > j+1 \end{cases}
\end{array}$$

a) gilt, weil $d$ ein Rand ist.
b) ist klar, wenn $j$ wesentlich größer ist als $i$. Zu überprüfen sind nur die Fälle $j = i + 1$ und $i$. Der Fall $j = i$ ist aber offensichtlich. Es bleibt also der Fall $j = i + 1$:

| $i$ | $i+1$ | $f_i f_{i+1}$ | | | | $f_{i+2} f_i$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\vdash$ |
| $\vdash$ | $\dashv$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\dashv$ | $\dashv$ |
| $\dashv$ | $\vdash$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\vdash$ | $\vdash$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\vdash$ | $\vdash$ |
| $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ | $\dashv$ |

c) i) $f_{j-1}\theta_i = \theta_i f_j$ , c) ii) $\theta_i f_i = id = \theta_{i+1} f_i$ und c) iii) $f_j \theta_{i-1} = \theta_i f_j$ für $i > j + 1$ wurden schon beim Beweis der Morita-Invarianz mitbewiesen.
Wiederum folgt die Azyklizität des Komplexes daraus, daß $f_0$ eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der 0 ist:

$$\text{Es gilt} \quad \begin{array}{rcll} d_1 f_0 & = & id & \\ d_{i+1} f_0 & = & f_0 d_i & \quad \text{für} \quad i \geq 1 \end{array}$$
$$\Longrightarrow \quad ds_0 + s_0 d = id$$

□

**Korollar**
Der Kettenkomplex $(CZ(D), d)$ ist ein simplizialer Komplex, wenn $D$ unitär ist.

**Beweis**
Ergänze die Abbildungen $f_i$, indem auf dem Tensoranteil an der (i+1)-ten Stelle die Einheit der Doppelalgebra eingefügt wird. Die Identitäten a), b) und c) gelten dann weiterhin. □

### 3.3.1.2 Definition

Der **Unterkomplex der degenerierten Elemente** von $CZ_n(D)$ sei
$Deg_n := f_0 CZ_{n-1}(D) + \cdots + f_{n-1} CZ_{n-1}(D)$

**Korollar**
Die Abbildung

$$CZ(D) \longrightarrow CZ(D)/Deg_*$$

ist ein Quasi-Isomorphismus.
**Beweis**
Die Behauptung gilt für alle simplizialen Komplexe. □
Mit obigem Satz sind auch die Voraussetzungen für das Theorem von Eilenberg und Zilber erfüllt, wenn $D$ eine Einheit enthält. Angewandt auf $CZ_n(D)$ ergibt dies:

#### 3.3.1.3 Satz

$$H_n(CZ_n(D) \times CZ_n(D')) \cong H_n(CZ(D) \otimes CZ(D'))$$

Ein Beweis für eine Künneth-Formel wie für die Hochschildhomologie läßt sich nicht übertragen. Die shuffle-Abbildungen, die in der Hochschildtheorie Kettenabbildungen sind, induzieren in der Theorie der Doppelalgebren noch nicht einmal Abbildungen in der Homologie.

Abgesehen von dem obigen allgemeingültigen Isomorphismus erhält man auf Kettenniveau auch noch andere Produkte:

#### 3.3.1.4 Proposition

Folgende Abbildung ist eine Abbildung von Kettenkomplexen:

$$\begin{array}{lcccc} S^{bar}_{p,q}: & CZ^{bar}_p(D) & \otimes & CZ^{bar}_q(D) & \longrightarrow & CZ^{bar}_{p+q-1}(D) \\ & k[Z_{p-1}]\otimes D^p & \otimes & k[Z_{q-1}]\otimes D^q & \longrightarrow & k[Z_{p+q-2}]\otimes D^{p+q-1} \end{array}$$

$S^{bar}_{p,q} : (z_1, \cdots, z_{p-1}; a_1, \cdots, a_p) \otimes (z'_1, \cdots, z'_{q-1}; a_{p+1}, \cdots, a_{p+q})$
$\mapsto (-1)^q (z_1, \cdots, z_{p-1}, z'_1, \cdots, z'_{q-1}; a_1, \cdots, a_p \vdash a_{p+1} + a_p \dashv a_{p+1}, \cdots, a_{p+q})$

**Beweis**
Zu zeigen ist folgende Identität:

$$b' \circ S^{bar}_{p,q} = S^{bar}_{p-1,q} \circ (b' \otimes id) + (-1)^p S^{bar}_{p,q-1}(id \otimes b')$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich ausdrücken als

$$(-1)^q \sum_{k=1}^{p+q-2} (x_1, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_{p+q-2}; c_1, \ldots, c_k x_k c_{k+1}, \ldots, c_{p+q-1})$$

Berechnet man die rechte Seite der Identität, so ergibt sich:

$\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{q+i}(z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_{p-1}, z'_1, \ldots, z'_{q-1}; a_1, \ldots, \tilde{a}_p \vdash a_{p+1} + \tilde{a}_p \dashv a_{p+1}, \ldots, a_{p+q})$

$+ \sum_{j=1}^{q-1}(-1)^{j+q-1}(z_1, \ldots, z_{p-1}, z'_1, \ldots, \hat{z}'_j, \ldots, z'_{q-1}) \otimes$

$$(a_1, \ldots, a_p \vdash \tilde{a}_{p+1} + a_p \dashv \tilde{a}_{p+1}, \ldots, a_{p+j+1} z'_j a_{p+j+2}, \ldots, a_{p+q})$$

Vergleicht man diese Ausdrücke an einer festen Stelle $k$, so ergibt sich die Gleichheit:

| | |
|---|---|
| $k < p-1:$ | Es gilt $c_k = a_k$ und das Vorzeichen ist in beiden Summen $(-1)^{k+q}$ |
| $k > p+1:$ | In diesem Bereich ist $c_k = a_{p+k+1}$ und $\hat{x}_k = \hat{z}'_{p-1+k}$. Also ist $c_k x_k c_{k+1} = a_{k+p+1} z_{p+k-1} a_{k+p+2}$. Das Vorzeichen ist in beiden Fällen $(-1)^{k+q}$ |
| $k = p-1:$ | Hier ist $c_k x_k c_{k+1} = a_{p-1} z_{p-1}(a_p \vdash a_{p+1} + a_p \dashv a_{p+1})$ mit Vorzeichen $(-1)^{p+q}$ |
| $k = p:$ | In diesem Fall ist $x_k = z'_1$. Damit ergibt sich: $c_k x_k c_{k+1} = (a_p \vdash a_{p+1}) z'_1 a_{p+2} + (a_p \dashv a_{p+1}) z'_1 a_{p+2}$. Dieser Term taucht auf beiden Seiten mit Vorzeichen $(-1)^{p+q}$ auf. |

□

In der Homologie induziert diese Abbildung ein Produkt

$$HZ_p^{bar}(D) \otimes HZ_q^{bar}(D) \longrightarrow HZ_{p+q-1}^{bar}(D)$$

Insgesamt kann man diese Abbildungen zusammenfassen

$$\bigoplus_{p+q=n} (HZ_p^{bar}(D) \otimes HZ_q^{bar}(D)) \longrightarrow HZ_{n-1}^{bar}(D)$$

Für den anderen Kettenkomplex $CZ'_n(D)$ gibt es ebenfalls eine Produktabbildung, die jedoch nicht mehr so übersichtlich wie die vorige ist.

#### 3.3.1.5 Proposition

$S_{p,q}(z_1, \cdots, z_p; a_1, \cdots, a_p) \otimes (z_{p+1}, \cdots, z_{p+q}; a_{p+1}, \cdots, a_{p+q})$
$:= (-1)^q((z_1, \cdots, z_{p-1}, z_{p+1}, \cdots, z_{p+q}; a_1, \cdots, a_p(z_p)a_{p+1}, \cdots, a_{p+q})$
$\quad +(z_1, \cdots, z_{p+q-1}; a_1, \cdots, a_p(z_{p+q})a_{p+1}, \cdots, a_{p+q}))$

kommutiert ebenfalls mit den Rändern.

In der Homologie induziert dies:

$$\bigoplus_{p+q=n} HZ'_p(D) \otimes HZ'_q(D) \longrightarrow HZ'_{n-1}(D)$$

## 3.4 Zyklische Homologie

Möchte man für Doppelalgebren eine zyklische Homologietheorie aufstellen, kann man sich die von Jean-Louis Loday gefundenen Verallgemeinerungen zunutze machen. Genau wie im Fall einer assoziativen Algebra und der Hochschild-Theorie besteht die Möglichkeit, zyklische Homologie zu definieren, wenn eine Operation der $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$ vorliegt, die gewisse Verträglichkeitsaxiome mit den Rand- und Ausartungsabbildungen erfüllen.

Definiere eine $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$ Operation auf $CZ_{n+1}(D)$ bzw. auf $CZ'_{n+1}(D)$ wie folgt:
Es sei $t$ der Erzeuger von $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$

$$t_\bullet(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n) := (-1)^n(z_n, z_0, \cdots, z_{n-1}; a_n, a_0, \cdots, a_{n-1})$$

**Behauptung**
Es gilt: $CZ'_{n+1}(D)$ ist mit dieser Operation ein zyklischer Modul, d.h. folgende Gleichungen sind erfüllt.

$$\begin{array}{llcll}
a) & t_n^{n+1} & = & id & \\
b) & d_i t_n & = & -t_{n-1}d_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\
c) & f_i t_n & = & -t_{n+1}f_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\
d) & d_0 t_n & = & (-1)^n d_n & \\
e) & f_0 t_n & = & (-1)^n t_{n+1}^2 f_n &
\end{array}$$

**Beweis**
Der Beweis dieser Behauptung ist eine einfache aber umfangreiche Rechnung.

Die erste Aussage ist sofort klar.
Zu b):

$$\begin{aligned}
&d_i t_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n) \\
&\quad = d_i(-1)^n(z_n, z_0, \cdots, z_{n-1}; a_n, a_0, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = (-1)^n(z_n, \cdots, \hat{z}_{i-1}, \cdots, z_{n-1}; a_n, \cdots, a_{i-1}z_{i-1}a_i, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = -t_{n-1}(z_0, \cdots, \hat{z}_{i-1}, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_{i-1}z_{i-1}a_i, \cdots, a_n) \\
&\quad = -t_{n-1}d_i(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

Auch der Fall i = n verläuft genauso.

Zu c):

$$\begin{aligned}
&f_i t_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n) \\
&\quad = (-1)^n(z_n, \cdots, z_{i-1}, z_{i-1}, \cdots, z_{n-1}; a_n, \cdots, a_{i-1}, 1, a_i, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = -t_{n+1}f_{i-1}(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

Zu d):

$$\begin{aligned}
&d_0 t_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n) \\
&\quad = d_0(-1)^n(z_n, z_0, \cdots, z_{n-1}; a_n, a_0, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = (-1)^n(z_0, \cdots, z_{n-1}; a_n z_n a_0, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = (-1)^n d_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

Zu e):

$$\begin{aligned}
&f_0 t_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n) \\
&\quad = f_0(-1)^n(z_n, z_0, \cdots, z_{n-1}; a_n, a_0, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = (-1)^n(z_n, z_n, z_0, \cdots, z_{n-1}; a_n, 1, a_0, \cdots, a_{n-1}) \\
&\quad = (-1)^n t_{n+1}^2(z_0, \cdots, z_n, z_n; a_0, \cdots, a_n, 1) \\
&\quad = (-1)^n t_{n+1}^2 f_n(z_0, \cdots, z_n; a_0, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

□

Damit gelten dann die Gleichungen, die zur Definition einer zyklischen Homologietheorie nötig sind:

$$\begin{array}{rcl} (1-t)d' & = & d(1-t) \\ d'N & = & Nd \end{array}$$

Dabei ist

$$\begin{array}{rcl} d & := & \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i \\ d' & := & \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i \\ N & := & \sum_{i=0}^{n} t^i. \end{array}$$

Der Doppelkomplex für zyklische Homologie sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccc} k[Z_n]\otimes D^{\otimes n} & \xleftarrow{1-t} & k[Z_n]\otimes D^{\otimes n} & \xleftarrow{N} & k[Z_n]\otimes D^{\otimes n} \\ \downarrow d & & \downarrow -d' & & \downarrow d \\ k[Z_{n-1}]\otimes D^{\otimes n-1} & \xleftarrow{1-t} & k[Z_{n-1}]\otimes D^{\otimes n-1} & \xleftarrow{N} & k[Z_n]\otimes D^{\otimes n-1} \\ \downarrow d & & \downarrow -d' & & \downarrow d \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow d & & \downarrow -d' & & \downarrow d \\ k[Z_1]\otimes D^{\otimes 1} & \xleftarrow{1-t} & k[Z_1]\otimes D^{\otimes 1} & \xleftarrow{N} & k[Z_1]\otimes D^{\otimes 1} \end{array}$$

Der Doppelkomplex an der Stelle $(p,q)$ ist dann so definiert, daß
$CCZ_{p,q} = k[Z_{q+1}]\otimes D^{\otimes q+1}$ gilt.

Die nun folgenden Ergebnisse gelten für jeden zyklischen Modul. J.-L. Loday hat die Ergebnisse, die für zyklische Homologie von assoziative Algebren gelten, auf beliebige zyklische Moduln übertragen und die Beweise dafür geführt (siehe [L-1], Seite 74-79). Deshalb wird hier darauf verzichtet, die einzelnen Aussagen noch einmal zu beweisen.

### 3.4.1 Der Connes-Komplex

Definiere

$$CZ_n^\lambda(D) := k[Z_{n+1}]\otimes D^{\otimes n+1}/(1-t)$$

Da $(1-t)d' = d(1-t)$ ist dies ein wohldefinierten Kettenkomplex, der **Connes-Komplex** für Doppelalgebren.

$$CZ_*^\lambda(D) : \cdots \xrightarrow{d} CZ_n^\lambda(D) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} CZ_0^\lambda(D)$$

$HZ_n^\lambda(D) := H(CZ_n^\lambda(D), d)$

#### 3.4.1.1 Satz

$$\mathbf{Q} \subseteq k \qquad \Longrightarrow HCZ_*(D) \cong HZ_*^\lambda(D)$$

**Beweis**
Aufgrund dergleichen Argumente wie in [L-1], Seite 54 gilt: Es gibt eine natürliche Surjektion

$$p : TotCCZ(D) \longrightarrow CZ^\lambda$$

Auf dem Anteil $k[Z_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$ ist p gerade die Projektion auf $k[Z_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}/1-t$ ; die übrigen Komponenten werden nach 0 abgebildet. Mit einer direkten Homotopy zwischen der Identität und der Null zeigt man, daß jede Zeile des Doppelkomplexes azyklisch ist mit $H_0 = CZ_*^\lambda$.

□

#### 3.4.1.2 Satz

Für jede unitäre Doppelalgebra $D$ gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz:

$$\cdots \longrightarrow HZ_n(D) \longrightarrow HCZ_n(D) \longrightarrow HCZ_{n-2}(D) \longrightarrow HZ_{n-1}(D) \longrightarrow \cdots$$

**Beweis**
(Siehe [L-1] Seite 77) □

## 3.5 Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten

### 3.5.1 Darstellungen von Doppelalgebren

#### 3.5.1.1 Definition

Eine **Darstellung** $M$ einer Doppelalgebra $D$ ist ein $k$-Vektorraum mit vier Abbildungen
$\vdash, \dashv$: $D \otimes M \longrightarrow M$
$\vdash, \dashv$: $M \otimes D \longrightarrow M$
welche die Axiome einer Doppelalgebra erfüllen, sobald zwei Terme aus $D$ sind und einer aus $M$.

**Beispiele**
1) Die Doppelalgebra $k\langle x\rangle$ aus Beispiel 3 , wobei $x$ diesmal ein Element aus einer Gruppe $G$ ist, operiert auf $k[G]$ via
$x \vdash g := xg$

$x \dashv g := x^{k-1}g$
$g \vdash x := gx$
$g \dashv x := gx^{k-1}$

2) Jede Doppelalgebra ist natürlich eine Darstellung über sich selbst.

#### 3.5.1.2 Definition

Die **universelle einhüllende Algebra** einer Doppelalgebra $D$ ist definiert als

$$U(D) := (k \oplus k\{x^{r,\vdash}, x^{l,\vdash}, x^{r,\dashv}, x^{l,\dashv} | x \in D\})/(\text{Relationen (1)-(12)})$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{(1)-(4)} & (x * y)^{r,\circ} & = & x^{r,\circ}y^{r,*} \\ \text{(5)-(8)} & x^{r,\circ}y^{l,*} & = & y^{l,*}x^{r,\circ} \\ \text{(9)-(12)} & (x * y)^{l,\circ} & = & y^{l,\circ}x^{l,*} \end{array}$$

Die Verknüpfungen $*, \circ$ sind dabei aus $\{\vdash, \dashv\}$

#### 3.5.1.3 Definition

Eine **Kodarstellung** $N$ von $D$ ist ein $U(D)$-Linksmodul.
Damit ergeben sich für die Abbildungen:
$\begin{array}{lcl} N \otimes D & \longrightarrow & N \\ D \otimes N & \longrightarrow & N \end{array}$ folgende Relationen:

$$\begin{array}{rcl} (n * x) \circ y & = & n \circ (y * x) \\ (x * n) \circ y & = & x * (n \circ y) \\ (x * y) \circ n & = & y \circ (x * n) \end{array}$$

$\forall x, y \in D, \quad n \in N$ und $\quad \circ, * \in \{\vdash, \dashv\}$

### 3.5.2 Homologie mit Koeffizienten in einer Kodarstellung

$CZ_n(D, N) := k[Z_{n-1}] \otimes N \otimes D^{\otimes n}$
Das Element aus $N$ sei mit $a_0$ bezeichnet. Die folgende Definition der Seitenabbildungen liefert einen Randoperator:

$$d := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

$d_i(z_1, \cdots, z_{n-1}; a_0, a_1, \cdots, a_n) := (z_1, \ldots, \hat{z}_i, \cdots, z_{n-1}) \otimes (a_0, \cdots, a_i(z_i)a_{i+1}, \cdots, a_n)$
für $i = 1, \ldots, n-1$
$d_0(z_1, \cdots, z_{n-1}; a_0, a_1, \cdots, a_n) := (z_2, \ldots, z_{n-1}, a_1 z_1 a_0, \ldots, a_n)$
$d_n(z_1, \cdots, z_{n-1}; a_0, a_1, \cdots, a_n) := (z_1, \ldots, z_{n-2}, a_0 z_{n-1} a_n, \ldots, a_{n-1})$

$HZ_n(D, N) := H(CZ_n(D, N), d)$

**Bemerkung 1**
Betrachtet man die Homologie mit Koeffizienten im Grundkörper $k$ mit trivialer Verknüpfung, so ergibt sich gerade der $CZ^{bar}(D)$-Komplex, weil die beiden zusätzlich eingefügten Terme verschwinden; es ist also

$$HZ^{bar}(D) = HZ(D, k)$$

**Bemerkung 2**
Sucht man etwas Analoges zu der oppositionellen Kodarstellung der Darstellung einer Dialgebra und stellt das dazugehörige Gleichungssystem auf, so ergibt sich, daß die Doppelalgebra wie eine assoziative Algebra auf einem Modul $M$ operieren müßte. Daher ist es nicht sinnvoll, das Analogon zur vollen Hochschildhomologie dadurch zu bilden, daß man die oppositionelle Doppelalgebra als Koeffizienten benutzt; die Definition von $CZ_n(D)$ als $k[Z_n] \otimes D^{\otimes n}$ war daher eine geeignete Wahl.

**Bemerkung 3**
Beim Vergleich mit der Hochschildtheorie ergab sich $HZ_n(A) \cong HH_n(A)$ für unitäre assoziative Algebren. Geht man noch einmal den Beweis dieses Satzes durch, so ist klar, daß er sich verallgemeinern läßt, indem man Koeffizienten aus einem unitären $A$-Bimodul $M$ zuläßt:

$$HZ_n(A, M) \cong H_n(A, M)$$

Die Operation von $A$ auf $M$ ist dabei die übliche:
$a \vdash m := ma =: a \dashv m$
$m \vdash a := am =: m \dashv m$

### 3.5.3 Kohomologie mit Koeffizienten in einer Darstellung

Wie im Fall einer Leibniz-Algebra genügt es nicht, einfach die Homologie zu dualisieren, sondern man muß bei Doppelalgebren eine andere Kohomologie-Theorie wählen. Sinnvoll ist es z.B. zu verlangen, daß die zweite Kohomologie die Äquivalenzklassen von Erweiterungen von Doppelalgebren ergibt und daß die erste Kohomologie etwas über die Derivationen aussagt.

Betrachte also folgenden Kokettenkomplex:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathrm{D} & & k[Z_1] \otimes D^{\otimes 2} & & k[Z_2] \otimes D^{\otimes 3} & & \\ 0 & \xrightarrow{\delta^0} & \downarrow & \xrightarrow{\delta^1} & \downarrow & \xrightarrow{\delta^2} & \downarrow & \xrightarrow{\delta^3} & \cdots \\ & & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & & \end{array}$$

Dabei hat der $n$-te Korand folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \delta^n f(z_1, \cdots, z_{n-1}; a_1, \cdots, a_n) \quad = \quad & f \circ d'(z_1, \cdots, z_{n-1}; a_1, \cdots, a_n) \\ & -a_1 z_1 f(z_2, \cdots, z_{n-1}; a_2, \cdots, a_n) \\ & +(-1)^n f(z_1, \cdots, z_{n-2}; a_1, \cdots, a_{n-1}) z_{n-1} a_n \end{aligned}$$

Zu zeigen ist $\delta^{n+1}\delta^n = 0$

$$\begin{aligned}
&\delta^{n+1}\delta^n f(z_1,\cdots,z_n;a_1,\cdots,a_{n+1}) \\
&= \delta^n f \circ d'(z_1,\cdots,z_n;a_1,\cdots,a_{n+1}) \\
&\quad -a_1z_1(\delta^n f)(z_2,\cdots,z_n;a_2,\cdots,a_{n+1}) \\
&\quad +(-1)^{n+1}(\delta^n f)(z_1,\cdots,z_{n-1};a_1,\cdots,a_n)z_na_{n+1} \\
&= -a_1z_1a_2z_2f(z_3,\cdots,z_n;a_3,\cdots,a_{n+1}) \\
&\quad +a_1z_1\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+2}f(z_2,\cdots,\hat{z}_i,\cdots,z_n;a_2,\cdots,a_iz_ia_{i+1},\cdots,a_{n+1}) \\
&\quad (-1)^n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f(z_1,\cdots,\hat{z}_i,\cdots,z_n;a_1,\cdots,a_iz_ia_{i+1},\cdots,a_n)z_na_{n+1} \\
&\quad +(-1)^n(-1)^{n+2}f(z_1,\cdots,z_{n-2};a_1,\cdots,a_{n-1})z_{n-1}a_nz_na_{n+1} \\
&\quad -a_1z_1f(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(z_2,\cdots,\hat{z}_{i+1},\cdots,z_n;a_2,\cdots,a_{i+1}z_{i+1}a_{i+2},\cdots,a_{n+1})) \\
&\quad +a_1z_1a_2z_2f(z_3,\cdots,z_n;a_3,\cdots,a_{n+1}) \\
&\quad +(-1)^{n+1}a_1z_1f(z_2,\cdots,z_{n-1};a_2,\cdots,a_n)z_na_{n+1} \\
&\quad (-1)^{n+1}f(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(z_1,\cdots,\hat{z}_i,\cdots,z_n;a_1,\cdots,a_iz_ia_{i+1},\cdots,a_n))z_na_{n+1} \\
&\quad +(-1)^{n+2}a_1z_1f(z_2,\cdots,z_{n-1};a_2,\cdots,a_n)z_na_{n+1} \\
&\quad +(-1)^{n+1}(-1)^nf(z_1,\cdots,z_{n-2};a_1,\cdots,a_{n-1})z_{n-1}a_nz_na_{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

### 3.5.4 Erweiterungen und zweite Kohomologie

Für eine fest gewählte Doppelalgebra $D$ und eine Darstellung dieser Doppelalgebra $M$ betrachte man die Erweiterungen von Doppelalgebren $(E)$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

Dabei sei die Doppelalgebra-Struktur auf $M$ trivial, d.h. $M \vdash M = 0 = M \dashv M$. Sei $E$ als Vektorraum isomorph zu $M \oplus D$. Je zwei solcher Erweiterungen $(E)$ und $(E')$ heißen isomorph, wenn es einen Morphismus von Doppelalgebren $\gamma \in Hom_{Dopp}(E, E')$ gibt, der mit den Projektionen und Inklusionen kommutiert.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_E} & E & \xrightarrow{\pi_E} & D & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow \gamma & & \downarrow id & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_{E'}} & E' & \xrightarrow{\pi_{E'}} & D & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dann gilt

#### 3.5.4.1 Satz

$$H^2(D,M) \cong Ext(D,M)$$

**Beweis**
Betrachte also eine Erweiterung

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

Dann sind durch folgende Festlegungen die beiden Abbildungen $\vdash, \dashv$ definiert:

$$\begin{array}{rcl} (m,a) \dashv (n,b) & := & (m \dashv b + a \dashv n + f(\dashv, a, b); a \dashv b) \\ (m,a) \vdash (n,b) & := & (m \vdash b + a \vdash n + f(\vdash, a, b); a \vdash b) \end{array}$$

also ist solch ein $f \in Hom(k[Z_1] \otimes D^{\otimes 2}, M)$.
Damit $E$ mit diesen Verknüpfungen eine Doppelalgebra wird, muß gelten:

$$f(z_1; a_1, a_2)z_2a_3 + f(z_2; a_1z_1a_2) = f(z_1; a_1, a_2z_2a_3) + a_1z_1f(z_2; a_2, a_3)$$

Das bedeuted aber gerade, daß $f$ Kozykel ist.

Sind jetzt zwei Erweiterungen äquivalent, so ist zu zeigen daß sie sich nur um einen Randterm unterscheiden. Die Abbildung $\gamma \in Hom_{Dopp}(E, E')$ erfüllt die beiden Bedingungen

$$\begin{array}{rcl} \pi_{E'} \circ \gamma & = & \pi_E \\ \gamma \circ i_E & = & i_{E'} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \gamma = \begin{pmatrix} id_M & g \\ 0 & id_d \end{pmatrix}$$

Also $\gamma(m,a) = (m + g(a), a)$ wobei $g : D \longrightarrow M$. Damit $\gamma$ auch eine Abbildung von Doppelalgebren ist, muß $\gamma$ folgende Bedingung erfüllen:

$$\gamma((m,a) * (n,b)) = \gamma(m,a) * \gamma(n,b)) \qquad * \in \{\vdash, \dashv\}$$

$\Longrightarrow g(a * b) = a * g(b) + g(a) * b$ und das heißt gerade, daß $g$ ein erster Korand ist. □

### 3.5.5 Derivationen und erste Kohomologie

#### 3.5.5.1 Definition

Eine **Derivation** einer Doppelalgebra mit Werten in einer Darstellung $M$ ist eine lineare Abbildung
$\Delta : D \longrightarrow M$ , die folgende Gleichung erfüllt:

$$\Delta(azb) = az\Delta(b) + \Delta(a)zb$$

$H^1$ besteht nur aus den Kozykeln, weil es keinen Korand gibt. Die Kozykel sind genau die Abbildungen von $D$ nach $M$, welche die definierende Gleichung der Derivation erfüllen, also gilt

$$H^1(D, M) = \{\text{Derivationen von } D \text{ nach } M\}$$

## 3.6 Operade der Doppelalgebren

Die Operade der Doppelalgebren $DD(n)$ ist erzeugt von den Monomen in $x_1, \cdots, x_n$, in denen jedes $x_i$ nur einmal vorkommt, also

$$x_{\sigma(i)} \circ \cdots \circ x_{\sigma(n)} \quad \circ \in \{\vdash, \dashv\} \quad \sigma \in \Sigma_n$$

Da es $2^{n-1}$ Möglichkeiten gibt, diese Zeichen zu wählen, folgt :

$$DD(n) = 2^{n-1}k[\Sigma_n]$$

Weiterhin gilt $DD = DD^!$ , weil die dualisierten Relationen genau die ursprünglichen der Doppelalgebra sind.

**Vermutung:** $DD(n)$ ist Koszul

Die freie Doppelalgebra über einem Vektorraum $V$ ist azyklisch, und dies ist nach [G-K] äquivalent dazu, daß $DD(n)$ Koszul ist, wenn der Kettenkomplex der Doppelalgebren mit dem Kettenkomplex der Algebren über der Operade übereinstimmt. Zu beweisen wäre also, daß der Komplex $(CZ^{bar}(D), b')$ der Operadenkomplex ist. Dieser Kettenkomplex berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} C_n^{DD}(D) &= D^{\otimes n} \otimes_{\Sigma_n} DD^!(n)^\vee \\ &= D^{\otimes n} \otimes_{\Sigma_n} DD(n)^\vee \\ &= D^{\otimes n} \otimes_{\Sigma_n} \mathrm{Hom}(2^{n-1}k[\Sigma_n], k) \\ &\cong k[Z_{n-1}] \otimes D^{\otimes n} \end{aligned}$$

Es ist mir aber leider noch nicht gelungen zu zeigen, daß der Rand von $C_*^{DD}$ gleich dem $b'$-Rand des bar-Komplexes für Doppelalgebren ist. Die $(n-1)-$Tupel der Multiplikationszeichen müssen vom Rand auf $(n-2)-$Tupel reduziert werden. Es müßte noch gezeigt werden, daß die Weise, in welcher der Rand des Operadenkomplexes die Einträge in $k[Z_{n-1}]$ entfernt, dieselbe ist wie im bar-Komplex für Doppelalgebren. Wäre dies gezeigt, so folgt aus der Tatsache, daß für assoziative Algebren der bar-Komplex mit dem Operadenkomplex übereinstimmt, die Vermutung.

# Literaturverzeichnis


[B-1] Carl-Friedrich Bödigheimer, On the topology of moduli spaces of Riemann surfaces, Part I: Hilbert uniformization, Math. Gött. sfb 170, Hefte 7 und 8 (1990)

[B-2] C.-F. Bödigheimer, Cyclic homology and the moduli space of Riemann surfaces, Math. Gött. SFB 170, Heft 9 (1993)

[F-1] Alessandra Frabetti, Dialgebra homology of associative algebras

[F-2] A. Frabetti, (Co)omologia delle dialgebre, Tesi di Dottorata dell'Universita di Bologna 1997

[G-K] Victor Ginzburg und Mikhail Kapranov, Koszul Duality for Operads, Duke Mathematical Journal Vol. 76 No. 1 (1994) 203-272

[G-S] Murray Gerstenhaber und Samuel D. Schack, Simplicial Cohomology is Hochschild Cohomology, Journal of Pure and Applied Algebra 30 (1983) 143-156

[L-1] Jean-Louis Loday, Cyclic Homology, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 301, Springer-Verlag 1992

[L-2] J.-L. Loday, Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres), C.R. Acad. Sci. Paris 321 (1995) 141-146

[L-3] J.-L. Loday Dialgebras - in preparation

[L-4] J.-L. Loday La renaissance des opérades, Seminaire Bourbaki 792

[L-P] J.-L. Loday und Timuraz Pirashvili, Universal Enveloping Algebras of Leibniz Algebras and (Co)homology, Math. Ann. 296 (1993) 139-158

[M] Peter May, The Geometry of Iterated Loop Spaces, Lecture Notes Vol. 271 (1972)