Vorlesung

Birgit Richter

Wintersemester 2010/11

Kategorientheorie mit Anwendungen in Topologie

> Category theory is intended as a universal language of mathematics, so all concepts should be translated into it. Much as beavers, who as a species hate the sound of running water, plaster a creek with mud and sticks until alas that cursed tinkle stops, so do category theorists devise elaborate and obscure definitions in an attempt to capture a concept that to most of us seemed perfectly clear before they got to it. But at least sometimes this works admirably – for instance no one can be immune to the charm of treating knot invariants with braided monoidal categories. [1]

Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe und Beispiele

Definition 1.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

(1) einer Klasse Ob$\mathcal{C}$, deren Elemente Objekte von $\mathcal{C}$ genannt werden.
(2) Für jedes Paar von Objekten A und B aus $\mathcal{C}$ gibt es eine Menge $\mathcal{C}(A, B)$, deren Elemente Morphismen von A nach B genannt werden.
(3) Für jedes Tripel A, B und C von Objekten gibt es ein Verknüpfungsgesetz
$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$
und die Verknüpfung eines Paares (f, g) von Morphismen wird mit $g \circ f$ bezeichnet.
(4) Für jedes Objekt A gibt es einen Morphismus 1_A, genannt die Identität auf A.

Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ, d. h. für Morphismen $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ und $h \in \mathcal{C}(C, D)$ gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

[1]Terry Gannon, Moonshine Beyond the Monster, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2006, p.87.

und die Identitätsmorphismen verhalten sich unter Verknüpfung neutral, d. h. für alle $f \in \mathcal{C}(A, B)$ gilt

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A.$$

Obwohl das für einige Beispiele von Kategorien unangemessen ist, notiert man häufig Morphismen $f \in \mathcal{C}(A, B)$ als Pfeile $f\colon A \to B$.

Der Morphismus 1_A ist durch das Objekt A eindeutig bestimmt: Sind 1_A und $1'_A$ Identitäten auf A, so gilt

$$1_A = 1_A \circ 1'_A = 1'_A.$$

Definition 1.2.

- Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *klein*, falls die Objekte eine Menge bilden.
- Eine Kategorie heißt *diskret*, falls sie nur Identitäten als Morphismen enthält.

Insbesondere sei X eine beliebige Klasse. Dann können Sie die Elemente aus X als Objekte auffassen und Sie betrachten nur die Identitätsmorphismen auf $x \in X$ als Morphismen. Dies ist die *diskrete Kategorie* auf X.

Sie kennen Beispiele von Kategorien, unter anderem:

- Sets: Kategorie der Mengen und Funktionen
- Gr: Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- Ab: Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- k-Vekt: Kategorie der k-Vektorräume und k-linearen Abbildungen (k ein Körper)
- R-Mod: Kategorie der R-Moduln und R-linearen Abbildungen (R ein assoziativer Ring mit Eins)
- Top: Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen
- Top_*: Kategorie der topologischen Räume mit gewähltem Grundpunkt und stetigen Abbildungen, die die Grundpunkte respektieren.
- CW: Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen
- Ch: Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen mit Kettenabbildungen

Andere Beispiele haben Morphismen, die Sie vielleicht etwas aussergewöhnlicher finden:

(1) Es sei Korr die Kategorie der sogenannten Korrespondenzen. Objekte dieser Kategorie sind Mengen und die Morphismen $\mathrm{Korr}(S, T)$ für zwei Mengen S und T sind die Teilmengen des Produktes $S \times T$. Was ist eine sinnvolle Definition der Identitätsmorphismen, der Komposition? Übung!

(2) Ist X eine partiell geordnete Menge, so betrachten wir als zugehörige Kategorie $\mathcal{C}_X$ diejenige, die als Objekte wiederum die Elemente aus X hat und deren Morphismenmenge $\mathcal{C}_X(x, y)$ aus genau einem Element besteht, falls $x \leq y$ gilt. Sonst sei diese Menge leer.

(3) Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}$ sei die Familie der offenen Menge in X. Wir können eine partielle Ordnung auf $\mathcal{O}$ definieren, indem wir deklarieren, dass $U \leq V$ gilt genau dann, wenn $U \subset V$.

(4) Oft betrachtet man Kategorien als Diagramme. Zum Beispiel sei $[0]$ die Kategorie mit einem Objekt und nur dem Identitätsmorphismus oder es sei $[1] = \{0, 1\}$ die Kategorie mit zwei Objekten 0 und 1, mit Identitätsmorphismen und mit einem weiteren Morphismus von 0 nach 1 (das ist also ein weiteres Beispiel einer poset-Kategorie). Diese Kategorie ist nützlich, um Morphismen in anderen Kategorien zu beschreiben, und zwar über sogenannte Funktoren.

(5) Aus formalen Gründen ist die leere Kategorie wichtig. Sie enthält kein Objekt und daher auch keine Morphismen.
(6) Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Dann sei $\mathcal{C}^o$ die Kategorie, welche die gleichen Objekte wie $\mathcal{C}$ hat und $\mathcal{C}^o(C, C') = \mathcal{C}(C', C)$. Für $f \in \mathcal{C}(C', C)$ bezeichne f^o den entsprechenden Morphismus in $\mathcal{C}^o(C, C')$. Die Komposition von $f^o \in \mathcal{C}^o(C, C')$ und $g^o \in \mathcal{C}^o(C', C'')$ ist $g^o \circ f^o := (f \circ g)^o$. Oft nennt man $\mathcal{C}^o$ die *zu $\mathcal{C}$ duale Kategorie*, aber oppositionelle Kategorie und andere Bezeichnungen finden sich auch in der Literatur.

Definition 1.3. Eine *Unterkategorie* $\mathcal{D}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus Objekten und Morphismen von $\mathcal{C}$, sodass $\mathcal{D}$ mit der von $\mathcal{C}$ vereerbten Verknüpfung von Morphismen wiederum eine Kategorie ist und sodass für alle Objekte D aus $\mathcal{D}$ der Morphismus 1_D ein Morphismus in $\mathcal{D}$ ist. Eine Unterkategorie $\mathcal{D}$ heißt *voll*, falls für alle Objekte D, D' von $\mathcal{D}$ gilt

$$\mathcal{D}(D, D') = \mathcal{C}(D, D').$$

Die Kategorie der abelschen Gruppen ist eine volle Unterkategorie der Kategorie aller Gruppen. Ist I die Kategorie der endlichen Mengen und injektiven Abbildungen, so ist diese Kategorie keine volle Unterkategorie der Kategorie Sets.

Definition 1.4. In einer Kategorie kann man von *Isomorphismen* reden, also Morphismen $f \in \mathcal{C}(C, C')$, für die es ein $g \in \mathcal{C}(C', C)$ gibt, mit $g \circ f = 1_C$ und $f \circ g = 1_{C'}$.

Für g schreiben wir auch f^{-1}, weil g durch f eindeutig bestimmt ist.

Definition 1.5. Ein *Funktor* F von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$

- besteht aus einer Abbildung von der Klasse der Objekte in $\mathcal{C}$ in die Klasse der Objekte von $\mathcal{D}$.
- Zu jedem Paar von Objekten C, C' aus $\mathcal{C}$ gibt es eine Abbildung
$$\mathcal{C}(C, C') \to \mathcal{D}(F(C), F(C')),\ f \mapsto F(f).$$
- Es gelten die beiden Axiome
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(C, C'), g \in \mathcal{C}(C', C''),$$
$$F(1_C) = 1_{F(C)}$$
für alle Objekte C aus $\mathcal{C}$.

Beispiele:
(1) Es sei $(-)_{ab}\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$ der Funktor, der einer Gruppe G den Quotienten $G/[G, G]$ zuordnet.
(2) Oft betrachtet man Funktoren, die Struktur vergessen, sogenannte *Vergissfunktoren*, zum Beispiel ist $U\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Sets}$ der Funktor, der einem topologischen Raum X die unterliegende Menge zuordnet, oder $U\colon k\text{-}\mathsf{Vekt} \to \mathsf{Ab}$, der einen k-Vektorraum auf die unterliegende abelsche Gruppe abbildet. Da stetige Abbildungen insbesondere Abbildungen von Mengen sind und da k-lineare Abbildungen auch Morphismen abelscher Gruppen sind, sind dies wirklich Funktoren. Überlegen Sie sich mindestens fünf weitere Beispiele von Vergissfunktoren.
(3) Die Inklusion einer Unterkategorie in eine Kategorie gibt einen Funktor.
(4) Die Identität auf Objekten und Morphismen ergibt einen Funktor $\mathrm{Id}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Dieser wird naheliegenderweise *Identitätsfunktor* genannt.

(5) Wenn Sie einem Raumpaar (X, A) die n-te singuläre Homologiegruppe, $H_n(X, A)$, zuordnen, so ist dies ein Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.
(6) Ordnen Sie einem Raum mit Grundpunkt, also einem Objekt in Top_*, die Fundamentalgruppe bzgl. des Grundpunktes zu, so ist dies ebenfalls ein Funktor.
(7) Ein Funktor $F\colon [0] \to \mathcal{C}$ entspricht einem Objekt in $\mathcal{C}$, nämlich dem Objekt $F(0)$.
(8) Ein Funktor $F\colon [1] \to \mathcal{C}$ entspricht zwei Objekten in $\mathcal{C}$, $F(0), F(1)$, und einem Morphismus zwischen ihnen, $F(0 < 1)$.
(9) Zu einer Menge X kann man die freie Gruppe betrachten, $\mathrm{Fr}(X)$, die von dieser Menge erzeugt wird. Abbildungen von Mengen $f\colon X \to Y$ induzieren Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Fr}(f)\colon \mathrm{Fr}(X) \to \mathrm{Fr}(Y)$ und Fr wird damit zu einem Funktor.
(10) Ebenso kann man eine Menge X auf die freie abelsche Gruppe abbilden, die von X erzeugt wird, $\mathrm{Fra}(X)$. Dies ergibt ebenfalls einen Funktor.
(11) Ein sehr wichtiges, unschuldig aussehendes Beispiel ist der folgende Funktor: Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und C sei ein gewähltes Objekt aus $\mathcal{C}$. Dann definiert die Zuordnung

$$D \mapsto \mathcal{C}(C, D)$$

einen Funktor von der Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie Sets. Funktoren dieser Bauart heißen *darstellbare Funktoren*.
(12) Später bei der Diskussion von (Ko)Limites brauchen wir den *konstanten Funktor*: Für zwei Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ und ein Objekt C' aus $\mathcal{C}'$ betrachten wir den Funktor

$$\Delta_{C'}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}', \Delta_{C'}(C) = C', \Delta_{C'}(f) = 1_{C'}$$

für alle Objekte C in $\mathcal{C}$ und alle $f \in \mathcal{C}(C, D)$.
(13) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so sei $C(M)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller glatten reellwertigen Funktionen auf M. Es bezeichne Sm die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen. Dann ist C ein Funktor von Sm^o in die Kategorie der reellen Vektorräume.

Wie bei Morphismen, notiert man häufig Funktoren als Pfeile $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.

Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißen oft auch *kovariante Funktoren* und Funktoren $F\colon \mathcal{C}^o \to \mathcal{D}$ heißen *kontravariante Funktoren* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$; dies sind also Zuordnungen von der Klasse der Objekte in $\mathcal{C}$ in die Klasse der Objekte in $\mathcal{D}$, sodass auf Morphismen gilt, dass F eine Abbildung $\mathcal{C}(C, C') \to \mathcal{D}(F(C'), F(C))$ induziert, sodass $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ ist und $F(1_C) = 1_{F(C)}$.

Sie kennen Beispiele kontravarianter Funktoren: singuläre Koketten oder Kohomologiegruppen sind kontravariante Funktoren von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe bzw. abelschen Gruppen. Ist $f\colon V \to W$ eine k-lineare Abbildung von k-Vektorräumen, so ist die duale Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ gegeben als $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Damit ist das Dualisieren, $(-)^*$, ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der k-Vektorräume auf sich selbst.

Die folgenden Eigenschaften von Funktoren werden häufig benutzt:

Definition 1.6.
- Ein *Isomorphismus von Kategorien* ist ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, der sowohl auf Objekten als auch auf Morphismen eine Bijektion ist.

- Ein Funktor heißt *voll*, falls es zu jedem Paar C, C' von Objekten in $\mathcal{C}$ und jedem Morphismus $g\colon F(C) \to F(C')$ einen Morphismus $f\colon C \to C'$ gibt mit $F(f) = g$.
- Ein Funktor heißt *treu*, falls für alle Paare von Objekten C, C' in $\mathcal{C}$ mit Morphismen $f_1, f_2\colon C \to C'$ mit der Eigenschaft $F(f_1) = F(f_2)$ gilt, dass $f_1 = f_2$.
- Ein Funktor heißt *volltreu*, falls die Zuordnung $F\colon \mathcal{C}(C, C') \to \mathcal{D}(F(C), F(C'))$, $f \mapsto F(f)$ eine Bijektion ist.

Bemerkung 1.7.

- Funktoren kann man verknüpfen und es gibt einen Identitätsfunktor, der Objekte und Morphismen unbeschadet auf sich selbst abbildet.
- Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann ein Isomorphismus von Kategorien, wenn es einen Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass die beiden Kompositionen von Funktoren $F \circ G$ und $G \circ F$ der jeweilige Identitätsfunktor sind.
- Suchen Sie ein Beispiel für einen Funktor F, der zwar volltreu ist, aber keine Isomorphie von Kategorien!

Zum Abschluss dieses einführenden Kapitels noch einige Grundbegriffe:

Definition 1.8. Im Folgenden sei $\mathcal{C}$ eine festgewählte Kategorie.

- Ein Objekt t in $\mathcal{C}$ heißt *terminales Objekt*, falls es zu jedem Objekt C in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus $f_C\colon C \to t$ gibt.
- Dual heißt ein Objekt s aus $\mathcal{C}$ *initiales Objekt*, falls es zu jedem Objekt C in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus $g^C\colon s \to C$ gibt.
- Ein *Nullobjekt* in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt 0 aus $\mathcal{C}$, das sowohl initial als auch terminal ist.

Ist t terminal, so hat t als einzigen Endomorphismus die Identität und ebenso ist der einzige Endomorphismus eines initialen Objekts die Identität.

Terminale und initiale Objekte sind eindeutig bis auf Isomorphie.

Für ein Nullobjekt haben Sie zwischen je zwei Objekten C, C' in $\mathcal{C}$ den Morphismus

$$C \xrightarrow{f_C} 0 \xrightarrow{g^{C'}} C'$$

Beispiele:

- In der Kategorie Sets der Mengen ist die leere Menge ein initiales Objekt und jede einelementige Menge ist terminal. Ein Nullobjekt besitzt Sets nicht. Dagegen hat die Kategorie Sets_* der punktierten Mengen ein Nullobjekt. Objekte von Sets_* sind Mengen S mit ausgewähltem Grundpunkt $x \in S$. Morphismen $f\colon (S, x) \to (T, y)$ sind Abbildungen von Mengen mit $f(x) = y$. Dann ist jede einelementige Menge ein Nullobjekt.
- Für einen assoziativen Ring mit Eins hat die Kategorie der Links-R-Moduln ein Nullobjekt, nämlich den Nullmodul 0. Für $R = \mathbb{Z}$ folgt, dass die Kategorie der abelschen Gruppen ein Nullobjekt hat.
- Die triviale Gruppe ist initial in Gr; sie ist auch Nullobjekt.

Definition 1.9. Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie $\mathcal{G}$, in der jeder Morphismus invertierbar ist.

Für eine Gruppe G ist die Kategorie mit einem Objekt und mit der Menge G als Endomorphismen dieses Objekts ein Gruppoid. Dieses Beispiel ist der Ausgangspunkt der Definition.

Interpretiert wird ein Gruppoid oft als *Gruppe mit mehreren Objekten*. Beachten Sie hierzu, dass für jedes Gruppoid $\mathcal{G}$ und jedes Objekt x aus $\mathcal{G}$ die Menge der Endomorphismen $\mathcal{G}(x,x)$ eine Gruppe ist.

- In der Topologie ist das *Fundamentalgruppoid* eines topologischen Raumes wichtig: Für einen Raum X sei $\Pi(X)$ die Kategorie, die als Objekte die Elemente aus X hat, und für zwei Punkte $x, y \in X$ ist
$$\Pi(X)(x,y) = [[0,1], 0, 1; X, x, y],$$
also die Menge aller Homotopieklassen von Wegen in X mit Anfangspunkt x und Endpunkt y. Was ist die Endomorphismengruppe eines Objekts x?
- Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die *Translationskategorie* einer Gruppe G, die wir mit E_G bezeichnen. Hier sind die Objekte von E_G die Elemente der Gruppe und
$$E_G(g,h) = \{hg^{-1}\},\ g \xrightarrow{hg^{-1}} h.$$

2. Natürliche Transformationen und das Yoneda-Lemma

Betrachten wir zum Beispiel die n-te singuläre Homologiegruppe eines Raumpaares (X,A), so haben wir den Verbindungshomomorphismus $\delta\colon H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ kennengelernt. Ist $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ eine Abbildung von Raumpaaren, so kommutiert
$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "f|_A"] \\ H_n(Y,B) \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(B). \end{tikzcd}$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer natürlichen Transformation, also einer Abbildung zwischen Funktoren.

Definition 2.1. Es seien F, G zwei Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$. Eine *natürliche Transformation* η von F nach G besteht aus einer Klasse von Morphismen $\eta_C \in \mathcal{C}'(F(C), G(C))$, so dass für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}(C,D)$ gilt, dass
$$\eta_D \circ F(f) = G(f) \circ \eta_C,$$
d. h. das Diagramm
$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(D) \arrow[r, "\eta_D"] & G(D) \end{tikzcd}$$
kommutiert.

So, wie man Morphismen gerne als Pfeile hinschreibt, benutzt man für natürliche Transformationen häufig das Symbol $\eta\colon F \Rightarrow G$.

Natürliche Transformationen können Sie verknüpfen: Sind F, G und H Funktoren wie oben und $\eta\colon F \Rightarrow G$, $\nu\colon G \Rightarrow H$, so gibt $\nu \circ \eta\colon F \Rightarrow H$. Wir haben natürlich immer die triviale Transformation, die die Identität auf den Objekten $F(C)$ ist.

Ist $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, so bilden die Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$ mit natürlichen Transformationen als Morphismen eine Kategorie. (Was geht schief bei beliebigen Kategorien?)

Beispiele

- Zwischen den Funktoren Fr und Fra gibt es die natürliche Transformation η, die durch $(-)_{\mathrm{ab}}$ induziert ist: Die freie abelsche Gruppe auf einer Menge X, $\mathrm{Fra}(X)$ ist isomorph zu $\mathrm{Fr}(X)/[\mathrm{Fr}(X),\mathrm{Fr}(X)]$ und eine Abbildung von Mengen $f\colon X \to Y$ macht das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fr}(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathrm{Fr}(f)"'] & \mathrm{Fra}(X) \arrow[d, "\mathrm{Fra}(f)"] \\ \mathrm{Fr}(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & \mathrm{Fra}(Y) \end{tikzcd}$$

- Es sei $\mathcal{P}$ der Funktor, der einer Menge S ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ zuordnet und der einer Abbildung von Mengen $f\colon S \to T$ die Abbildung zuordnet, die einem $X \in \mathcal{P}(S)$ die Teilmenge $f(X) \in \mathcal{P}(T)$ zuordnet. Dies gibt eine natürliche Transformation η vom Identitätsfunktor auf Sets zum Funktor $\mathcal{P}$.
- Es sei V ein k-Vektorraum. Dann kennen Sie die Abbildung von V in sein Biduales
$$\iota_V\colon V \to V^{**}, v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v)), v \in V, \varphi \in V^*.$$
Ist $f\colon V \to W$ k-linear, so ist $\iota_W \circ f = f^{**} \circ \iota_V$ und damit ist ι eine natürliche Transformation vom Identitätsfunktor zum Funktor, der einen Vektorraum auf sein Biduales abbildet und ein k-lineares f auf f^{**}.

Das Yoneda-Lemma besagt nun das Folgende:

Theorem 2.2. (Yoneda-Lemma) Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und F ein Funktor von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Mengen und Funktionen, Sets.

(1) Für jedes Objekt C aus $\mathcal{C}$ gibt es eine Bijektion $Y_{F,C}$ zwischen der Menge der natürlichen Transformationen von $\mathcal{C}(C,-)$ nach F, $\mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C,-),F)$, und der Menge $F(C)$.
(2) Die Bijektionen $Y_{F,C}$ ergeben zusammen eine natürliche Transformation für variierendes C.
(3) Ist $\mathcal{C}$ klein, so ergeben die $Y_{F,C}$ zusammen eine natürliche Transformation für variierendes F.

Beweis. Ist η eine solche natürliche Transformation, so gibt es also insbesondere für jedes Objekt C' aus $\mathcal{C}$ eine Abbildung
$$\eta_{C'}\colon \mathcal{C}(C,C') \to F(C').$$
Wir setzen
$$Y_{F,C}(\eta) := \eta_C(1_C).$$
Ist x ein Element der Menge $F(C)$, so definieren wir für jedes Objekt C' von $\mathcal{C}$ und jedes $f \in \mathcal{C}(C,C')$
$$T_{x,C'}(f) := F(f)(x).$$
Für variierendes f erhalten wir eine Abbildung
$$T_{x,C'}\colon \mathcal{C}(C,C') \to F(C')$$
und diese ergibt eine natürliche Transformation $T_x\colon \mathcal{C}(C,-) \Rightarrow F$:

Ist $g\colon C' \to C''$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so gilt für alle $f \in \mathcal{C}(C,C')$
$$F(g) \circ T_{x,C'}(f) = F(g)(F(f)(x)) = F(g \circ f)(x) = T_{x,C''} \circ \mathcal{C}(C, g \circ f) = T_{x,C''} \circ \mathcal{C}(C,g)(f)$$

und das ergibt

$$F(g) \circ T_{x,C'} = T_{x,C''} \circ \mathcal{C}(C, g).$$

Die Abbildungen $Y_{F,C}$ und T sind invers zueinander: Für $x \in F(C)$ ist

$$Y_{F,C}(T_x) = T_{x,C}(1_C) = F(1_C)(x) = 1_{F(C)}(x) = x.$$

Andererseits haben wir für jede natürliche Transformation $\eta\colon \mathcal{C}(C, -) \Rightarrow F$ und für jedes $f\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$, dass

$$T_{Y_{F,C}(\eta),C'}(f) = T_{\eta_C(1_C),C'}(f) = F(f)(\eta_C(1_C)) = \eta_{C'}(\mathcal{C}(C, f)(1_C)) = \eta_{C'}(f \circ 1_C) = \eta_{C'}(f).$$

Für die Natürlichkeit in C betrachten wir den Funktor $N\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$, der auf Objekten gegeben ist durch

$$N(C) := \mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), F).$$

Ist $f\colon C \to C'$, so ist $N(f)\colon \mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), F) \to \mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C', -), F)$ definiert durch

$$N(f)(\eta) := \eta \circ \mathcal{C}(f, -).$$

Wir definieren die natürliche Transformation $\psi\colon N \Rightarrow F$ als $\psi_C := Y_{F,C}$ und rechnen stur nach:

$$(Y_{F,C'} \circ N(f))(\eta) = Y_{F,C'}(\eta \circ \mathcal{C}(f, -)) = (\eta \circ \mathcal{C}(f, -))(1_{C'}) = \eta_{C'}(f)$$

und

$$(F(f) \circ Y_{F,C})(\eta) = F(f)(\eta_C(1_C)) = \eta_{C'} \circ \mathcal{C}(f, -))(1_C) = \eta_{C'}(f).$$

Also $\psi_{C'} \circ N(f) = F(f) \circ \psi_C$.

Ist $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, so bilden die Funktoren von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Mengen selbst eine Kategorie mit natürlichen Transformationen als Morphismen. Wir nennen diese Kategorie $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$ und definieren den Funktor

$$\Upsilon\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets}) \to \mathsf{Sets}, \Upsilon(F) := \mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), F).$$

Ist G ein Objekt in $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$ also ein Funktor von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Mengen und ist $\gamma\colon F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation, so setzen wir

$$\Upsilon(\gamma)\colon \mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), F) \to \mathsf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), G)$$

an als $\Upsilon(\gamma)(\eta) := \gamma \circ \eta$.

Wir betrachten für ein festes Objekt C aus $\mathcal{C}$ die Auswertungsabbildung $\varepsilon_C\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets}) \to \mathsf{Sets}$, die einen Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$ auf

$$\varepsilon_C(F) := F(C)$$

abbildet und $\varepsilon_C(\gamma) = \gamma_C$. Damit wird ε_C zu einem einen Funktor.

Wir definieren $\varphi\colon \Upsilon \Rightarrow \varepsilon_C$ als

$$\varphi_F := Y_{F,C}.$$

Eine Rechnung zeigt dann, dass $\varphi_G \circ \Upsilon(\gamma) = \varepsilon_C(\gamma) \circ \varphi_F$ für G wie oben. $\square$

Das Yoneda-Lemma ist eins der wichtigsten Beweishilfsmittel in der Kategorientheorie und ihren Anwendungen. Sie können die Menge $F(C)$ ausdrücken als eine Menge natürlicher Transformationen und Sie können den Funktor F damit kontrollieren.

Korollar 2.3. Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und C, C' zwei Objekte aus $\mathcal{C}$. Dann steht die Menge der natürlichen Transformationen zwischen den darstellbaren Funktoren $\mathcal{C}(C, -)$ und $\mathcal{C}(C', -)$ in Bijektion zu $\mathcal{C}(C', C)$.

Dieses unscheinbare Korollar hat viele Anwendungen! Zum Beispiel lassen sich Kohomologieoperationen auf singulärer Kohomologie darüber beschreiben.

Wenn Sie Funktoren haben, die nicht nach Sets gehen, sondern in eine andere Kategorie, dann müssen Sie das Lemma anpassen; oft klappt das.

3. Äquivalenzen von Kategorien und adjungierte Funktoren

Häufig möchte man verstehen, wie ähnlich sich Kategorien sind.

Definition 3.1. Ein Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$ heißt eine *Äquivalenz von Kategorien*, falls es einen Funktor G von $\mathcal{C}'$ nach $\mathcal{C}$ gibt, sodass es natürliche Isomorphismen vom Identitätsfunktor auf $\mathcal{C}'$ nach $F \circ G$ gibt und von $G \circ F$ zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{C}$.

Hierbei heißt eine natürliche Transformation η ein natürlicher Isomorphismus, falls jedes η_C ein Isomorphismus ist (d. h. ein Morphismus, der ein Inverses besitzt). Man kann auch versuchen, strikter zu sein, d. h. ein echtes Inverses von F zu finden. Das ist häufig zu einschränkend.

Definition 3.2. Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Kategorien. Eine *Adjunktion zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$* ist ein Paar von Funktoren $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $R\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, sodass es für jedes Paar von Objekten C aus $\mathcal{C}$ und C' aus $\mathcal{C}'$ eine Bijektion von Mengen

$$\varphi_{C,C'}\colon \mathcal{C}'(L(C), C') \cong \mathcal{C}(C, R(C'))$$

gibt, die natürlich ist in beiden Variablen.

Der Funktor L heißt dann *linksadjungiert* zu R (und entsprechend ist R *rechtsadjungiert* zu L).

Die Natürlichkeitsbedingung für die Bijektionen $\varphi_{C,C'}$ bedeuten, dass für Morphismen $f\colon C \to D$ in $\mathcal{C}$ und $g\colon C' \to D'$ in $\mathcal{C}'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}'(L(D), C') \arrow[r, "\mathcal{C}'(Lf, C')"] \arrow[d, "\varphi_{D,C'}"'] & \mathcal{C}'(L(C), C') \arrow[r, "\mathcal{C}'(L(C), g)"] \arrow[d, "\varphi_{C,C'}"] & \mathcal{C}'(L(C), D') \arrow[d, "\varphi_{C,D'}"] \\
\mathcal{C}(D, R(C')) \arrow[r, "\mathcal{C}(f, R(C'))"] & \mathcal{C}(C, R(C')) \arrow[r, "\mathcal{C}(C, R(g))"] & \mathcal{C}(C, R(D'))
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Adjunktionen werden oft abgekürzt notiert mit $\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}'$ oder auch $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon R$.

Das prototypische Beispiel ist eine Adjunktion, bei der man einen Vergissfunktor und einen freien Funktor betrachtet.

Es sei zum Beispiel U der Funktor, der einer abelschen Gruppe A die unterliegende Menge von A zuordnet und Fra sei der Funktor, der einer Menge X die freie abelsche Gruppe mit Basis X zuordnet. Dann ist Fra linksadjungiert zu U.

So wie man Funktoren verketten kann und natürliche Transformationen hintereinanderschalten kann, ist es möglich, diese beiden Konzepte zu mischen:

Ist $\varphi\colon F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und ist $H\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ ein Funktor, so sei $H(\eta)\colon H \circ F \Rightarrow H \circ G$ die natürliche Transformation, die auf einem Objekt C aus $\mathcal{C}$ gegeben ist durch

$$H(\eta_C)\colon H(F(C)) \to H(G(C)).$$

Analog ist für einen Funktor $K\colon \tilde{C} \to \mathcal{C}$ die natürliche Transformation $\eta_K\colon F \circ K \Rightarrow G \circ K$ gegeben durch

$$\eta_{K(\tilde{C})}\colon F(K(\tilde{C})) \to G(K(\tilde{C})).$$

Identitätsfunktoren werden im Folgenden mit Id bezeichnet.

Proposition 3.3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Der Funktor L ist linksadjungiert zu R (also ist R rechtsadjungiert zu L).

(2) Es gibt natürliche Transformationen $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow R \circ L$ und $\varepsilon\colon L \circ R \Rightarrow \mathrm{Id}$ mit den Eigenschaften

$$\varepsilon_L \circ L(\eta) = \mathrm{Id}_L \text{ und } R(\varepsilon) \circ \eta_R = \mathrm{Id}_R,$$

insbesondere kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd} L(C) \arrow[r, "L(\eta)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{L(C)}"'] & LRL(C) \arrow[d, "\varepsilon_{L(C)}"] \\ & L(C) \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} R(C') \arrow[r, "\eta_{R(C')}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{R(C')}"'] & RLR(C') \arrow[d, "R(\varepsilon_{LR(C')})"] \\ & R(C') \end{tikzcd}$$

für alle Objekte C aus $\mathcal{C}$ und C' aus $\mathcal{C}'$.

Die Transformation η wird auch oft *Einheit* der Adjunktion genannt und ε die *Ko-Einheit*.

Beweis. Ist eine Adjunktion gegeben, so definieren wir

$$\eta_C := \varphi_{C,LC}(1_{LC}),\ \varepsilon_{C'} := \varphi^{-1}_{RC',C'}(1_{RC'}).$$

Hierbei ist $1_{LC} \in \mathcal{C}'(LC, LC)$ und $1_{RC'} \in \mathcal{C}(RC', RC')$. Die Natürlichkeit der Bijektionen $\varphi_{C,C'}$ garantiert, dass die so definierten Morphismen natürliche Transformationen sind.

Sind umgekehrt η und ε mit den obigen Eigenschaften gegeben und ist $f \in \mathcal{C}'(LC, C')$, so definieren wir $\varphi_{C,C'}(f)\colon C \to RC'$ als

$$C \xrightarrow{\eta_C} RLC \xrightarrow{R(f)} RC'.$$

$\square$

Wie konstruiert man Adjunktionen? Manchmal kann man den Adjungierten objektweise raten:

Definition 3.4. Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein beliebiger Funktor und D sei ein Objekt von $\mathcal{D}$. Eine *Reflexion von D an F* ist ein Paar (G_D, η_D), wobei

- G_D ein Objekt in $\mathcal{C}$ ist und
- $\eta_D\colon D \to F(G_D)$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$ ist,

so dass es für alle Objekte C aus $\mathcal{C}$ und für alle $\beta\colon D \to F(C)$ genau ein $\alpha\colon G_D \to C$ gibt mit

$$F(\alpha) \circ \eta_D = \beta.$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "\beta"] & F(G_D) \arrow[dl, dotted, "F(\alpha)"] \\ F(C). \end{tikzcd}$$

Die Universalität der Reflexion garantiert (wieder einmal) die Eindeutigkeit.

Lemma 3.5. Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein beliebiger Funktor und D sei ein Objekt von $\mathcal{D}$. Dann ist eine Reflexion von D an F eindeutig bis auf Isomorphie.

Beweis. Wir nehmen an, dass (G'_D, η'_D) ein Konkurrent der Reflexion (G_D, η_D) ist. Die definierende Eigenschaft der Reflexion gibt uns ein eindeutiges $\alpha\colon G_D \to G'_D$ mit $F(\alpha_D) \circ \eta_D = \eta'_D$ und ebenso erhalten wir für die Reflexion (G'_D, η'_D) ein eindeutiges $\alpha'\colon G'_D \to G_D$, mit $F(\alpha') \circ \eta'_D = \eta_D$. Damit gilt aber auch

$$F(\alpha \circ \alpha') = F(\alpha) \circ F(\alpha') \circ \eta'_D = \eta'_D \text{ und } F(\alpha' \circ \alpha) = F(\alpha') \circ F(\alpha) \circ \eta_D = \eta_D.$$

Mit der Eindeutigkeit von $\alpha' \circ \alpha$ und $\alpha \circ \alpha'$ folgt dann

$$\alpha' \circ \alpha = 1_{G_D} \text{ und } \alpha' \circ \alpha = 1_{G'_D}.$$

□

Mit einer Reflexion erhalten wir also ein Objekt G_D zusammen mit einer Strukturabbildung $\eta_D\colon D \to F(G_D)$, die im obigen Sinne optimal ist. Gibt es so etwas für alle Objekte, dann können wir daraus wie folgt einen Funktor bauen.

Lemma 3.6. Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und für alle Objekte D aus $\mathcal{D}$ existiere eine Reflexion von D an F, und (G_D, η_D) sei eine Wahl einer Reflexion für alle D.

Dann gibt es genau einen Funktor $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, sodass

- für alle Objekte D aus $\mathcal{D}$ gilt: $L(D) = G_D$ und
- die Morphismen $\eta_D\colon D \to FL(D)$ ergeben zusammen eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow FL$.

Beweis. Wir setzen natürlich $L(D) := G_D$. Es sei $f\colon D \to D'$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$ und es seien $(G_D, \eta_D), (G_{D'}, \eta_{D'})$ die zugehörigen Reflexionen. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\eta_{D'} \circ f"] & F(G_D) \arrow[dl, dotted, "F(\alpha)"] \\
D' \arrow[r, "\eta_{D'}"] & F(G_{D'}) &
\end{tikzcd}$$

Es gibt genau ein $\alpha\colon G_D \to G_{D'}$ mit

$$F(\alpha) \circ \eta_D = \eta_{D'} \circ f.$$

Wir setzen $L(f) = \alpha$ und zeigen nun, dass diese Zuordnung tatsächlich einen Funktor definiert. Beachten Sie, dass nach Konstruktion die Morphismen η_D natürlich sind.

Gegeben sei also ein weiterer Morphismus $g\colon D' \to D''$ in $\mathcal{D}$ und $\beta\colon G_{D'} \to G_{D''}$ sei die eindeutige induzierte Abbildung mit $F(\beta) \circ \eta_{D'} = \eta_{D''} \circ g$. Dann ist

$$F(L(g) \circ L(f)) \circ \eta_D = FL(g) \circ FL(f) \circ \eta_D,$$

weil F ein Funktor ist. Da

$$FL(f) \circ \eta_D = F(\alpha) \circ \eta_D$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}FL(g) \circ FL(f) \circ \eta_D =& FL(g) \circ \eta_{D'} \circ f\\ =& F(\beta) \circ \eta_{D'} \circ f\\ =& \eta_{D''} \circ g \circ f.\end{aligned}$$

Andererseits ist $FL(g \circ f) \circ \eta_D = \eta_{D''} \circ (g \circ f)$ und aus der Eindeutigkeit folgt

$$L(g \circ f) = L(g) \circ L(f).$$

Zu zeigen bleibt, dass $L(1_D) = 1_{L(D)}$ erfüllt ist. Betrachten Sie hierzu wiederum

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "1_D"'] & F(G_D) \arrow[d, dotted, "F(\alpha)"] \\ D \arrow[r, "\eta_D"] & F(G_D). \end{tikzcd}$$

D. h. α ist eindeutig mit $F(\alpha) \circ \eta_D = \eta_D \circ 1_D$. Die Identität auf G_D erfüllt diese Gleichung aber ebenfalls. $\square$

Damit können wir ein weiteres Kriterium dafür angeben, wann ein Funktor F einen Linksadjungierten besitzt.

Proposition 3.7. Ein Funktor $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ist genau dann linksadjungiert zu $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, wenn es ein $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow F \circ L$ gibt, sodass für alle Objekte D aus $\mathcal{D}$ das Paar $(L(D), \eta_D\colon D \to FL(D))$ eine Reflexion ist.

Beweis. Für die Rückrichtung brauchen wir zunächst ein $\varepsilon\colon FL \Rightarrow \mathrm{Id}$. Nach Voraussetzung hat jedes FC die Reflexion $(LFC, \eta_{FC}\colon FC \to FLFC)$, insbesondere gibt es genau ein $\varepsilon_C\colon LFC \to C$, sodass

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\eta_{FC}"] \arrow[d, "1_{FC}"] & FLFC \arrow[dl, dotted, "F(\varepsilon_C)"] \\ FC & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zu zeigen bleibt, dass diese ε_C natürlich sind in C. Es sei also $f\colon C \to C'$ ein Morphismus. Da η eine natürliche Transformation ist, gilt

$$F(\varepsilon_{C'} \circ LF(f)) \circ \eta_{FC} = F(\varepsilon_{C'}) \circ FLF(f) \circ \eta_{FC} = F(\varepsilon_{C'}) \circ \eta_{FC'} \circ F(f) = 1_{FC'} \circ F(f) = F(f).$$

Andererseits ist

$$F(f \circ \varepsilon_C) \circ \eta_{FC} = F(f) \circ F(\varepsilon_C) \circ \eta_{FC} = F(f) \circ 1_{FC} = F(f).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Abbildung können wir

$$f \circ \varepsilon_C = \varepsilon_{C'} \circ LF(f)$$

schließen.

Da

$$F(\varepsilon_{LD} \circ L(\eta_D)) \circ \eta_D = F(\varepsilon_{LD}) \circ FL(\eta_D) \circ \eta_D = \eta_D = F(1_{LD}) \circ \eta_D,$$

folgt wiederum aus der Eindeutigkeit der Abbildung, dass $F\varepsilon_{LD} \circ L(\eta_D) = 1_{LD}$ gilt.

Nehmen wir nun an, dass L linksadjungiert ist zu F. Es sei $\varphi_{D,C}\colon \mathcal{C}(LD,C) \cong \mathcal{D}(D,FC)$ die binatürliche Bijektion der Adjunktion. Wir behaupten, dass für alle D aus $\mathcal{D}$ das Paar $(LD, \varphi_{D,LD}(1_{LD}))$ eine Reflexion ist.

Es sei C ein beliebiges Objekt aus $\mathcal{C}$ und $\beta\colon D \to FC$ sei ein beliebiger Morphismus. Da $\varphi_{D,C}$ eine Bijektion ist, ist β eindeutig schreibbar als $\beta = \varphi_{D,C}(\alpha)$ für ein eindeutiges $\alpha\colon LD \to C$. Aus der Natürlichkeit der $\varphi_{D,C}$ folgt

$$F(\alpha) \circ \varphi_{D,LD}(1_{LD}) = \mathcal{D}(D, F(\alpha))(\varphi_{D,LD})(1_{LD}) = \varphi_{D,C} \circ \mathcal{C}(LD,\alpha)(1_{LD}) = \varphi_{D,C}(\alpha) = \beta.$$

Ist $\alpha'\colon LD \to C$ ein weiterer Morphismus mit der Eigenschaft

$$F(\alpha') \circ \varphi_{D,LD}(1_{LD}) = \beta,$$

so folgt

$$\varphi_{D,C}(\alpha') = \varphi_{D,C}(\mathcal{C}(LD,\alpha')(1_{LD})) = \mathcal{D}(D, F(\alpha')(\varphi_{D,LD}(1_{LD})) = F(\alpha')(\varphi_{D,LD}(1_{LD})) = \beta$$

und die Injektivität der $\varphi_{D,C}$ liefert dann $\alpha = \alpha'$. □

Bevor wir Reflexionen benutzen können, um Äquivalenzen von Kategorien zu beschreiben, brauchen wir noch die folgende Hilfsaussage.

Lemma 3.8. Es sei $\mathcal{D} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ ein Paar adjungierter Funktoren. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Der Funktor R ist volltreu.
(2) Die natürliche Transformation $\varepsilon\colon LR \Rightarrow \mathrm{Id}$ ist ein natürlicher Isomorphismus.

Ist eine der beiden Bedingungen erfüllt, so sind auch die Verkettungen η_R und $L\eta$ natürliche Isomorphismen.

Beweis. Da R voll ist, ist der Morphismus $\eta_{RC}\colon RC \to RLRC$ von der Form $R(f_C)$ für ein $f_C\colon C \to LRC$. Da die Gleichheit

$$R(\varepsilon_C \circ f_C) = R(\varepsilon_C) \circ R(f_C) = R(\varepsilon_C) \circ \eta_{RC} = 1_{RC} = R(1_C)$$

gilt und da R treu ist, können wir folgern, dass $\varepsilon_C \circ f_C = 1_C$. Für die Gleichheit $f_C \circ \varepsilon_C = 1_{LRC}$ betrachten wir

$$R(f_C \circ \varepsilon_C) \circ \eta_{RC} = \eta_{RC} \circ R\varepsilon_C \circ \eta_{RC} = \eta_{RC} = R(1_{LRC}) \circ \eta_{RC}.$$

Die Reflexionseigenschaft impliziert dann die gewünschte Gleichung.

Nehmen wir nun an, dass ε ein natürlicher Isomorphismus ist, so betrachten wir die Verknüpfung

$$\mathcal{C}(C,C') \xrightarrow{\mathcal{C}(\varepsilon_C, C')} \mathcal{C}(LRC, C') \xrightarrow{\varphi_{RC,C'}} \mathcal{D}(RC, RC').$$

Jeder Faktor ist eine Bijektion, also auch die Komposition. Ist $f\colon C \to C'$, so wird f abgebildet auf

$$\varphi_{RC,C'}(f \circ \varepsilon_C) = R(f \circ \varepsilon_C) \circ \eta_{RC} = Rf \circ R(\varepsilon_C) \circ \eta_{RC} = Rf \circ 1_{RC} = Rf,$$

also ist die Zuordnung $f \mapsto Rf$ eine Bijektion und R ist volltreu.

Es gelten die Identitäten

$$R(\varepsilon_C) \circ \eta_{RC} = 1_{RC},\ \varepsilon_{LD} \circ L(\eta_D) = 1_{LD}$$

für alle Objekte C aus $\mathcal{C}$ und D aus $\mathcal{D}$. Unter der Annahme von (1) und (2) ist sowohl ε_{LD} als auch ε_C ein Isomorphismus und daher sind auch die Abbildungen η_{RC} und $L\eta_D$ Isomorphismen. □

Damit erhalten wir alternative Beschreibungen für Äquivalenzen von Kategorien.

Theorem 3.9. Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein beliebiger Funktor. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Der Funktor F hat einen Linksadjungierten L und die zugehörigen natürlichen Transformationen $\varepsilon\colon LF \Rightarrow \mathrm{Id}$ und $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow FL$ sind natürliche Isomorphismen.
(2) Es gibt einen Funktor $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und zwei beliebige natürliche Isomorphismen $\mathrm{Id} \cong FL$ und $LF \cong \mathrm{Id}$.
(3) Der Funktor F ist volltreu und jedes Objekt D aus $\mathcal{D}$ ist isomorph zu einem Objekt der Form FC mit einem Objekt C aus $\mathcal{C}$.

Beweis. Die Implikation von (1) nach (2) ist klar. Für die von (2) auf (3) nehmen Sie die Isomorphie von D zu FLD und erhalten mit $C = LD$, dass jedes D isomorph ist zu FC.

Die Verkettung $F \circ L$ ist natürlich isomorph zur Identität; dies impliziert, dass FL volltreu ist und damit dass L treu und F voll ist. Der natürliche Isomorphismus von $L \circ F$ zur Identität liefert die Volltreuheit von LF und damit dass L voll ist und F treu.

Für die Behauptung, dass (3) (1) impliziert, wählen Sie für jedes C ein D mit $D \cong FC$ und nennen Sie dieses C LD. Wählen Sie jeweils einen Isomorphismus $\eta_D\colon D \to FLD$. Ist C' ein beliebiges Objekt von $\mathcal{C}$ und ist $\beta\colon D \to FC'$ gegeben, so ist

$$FLD \xrightarrow{\eta_D^{-1}} D \xrightarrow{\beta} FC'$$

von der Form $F(\gamma)$ für ein eindeutiges $\gamma\colon LD \to C$, weil F volltreu ist. Dies zeigt, dass (LD, η_D) eine Reflexion von D an F ist und damit, dass L linksadjungiert ist zu F nach Proposition 3.7. Die η_D sind Isomorphismen nach Konstruktion und die Natürlichkeit folgt wie im Beweis von Lemma 3.6. Der Rest folgt aus Lemma 3.8. □

Die Eigenschaft, dass jedes D in der Zielkategorie des Funktors F isomorph ist zu einem Objekt der Form $F(C)$, nennt man *wesentlich surjektiv* oder auch *dicht*.

Definition 3.10.

- Eine Kategorie heißt *reduziert*, falls je zwei isomorphe Objekte identisch sind.
- Eine Unterkategorie $\mathcal{S}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein *Skelett*, falls $\mathcal{S}$ reduziert ist und die Inklusion $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Mit Kriterium (3) aus Theorem 3.9 kann man leicht testen, ob eine reduzierte Unterkategorie ein Skelett ist.

Betrachten Sie zum Beispiel die Kategorie Fin der endlichen Mengen und Funktionen und darin die volle Unterkategorie mit Objekten $\{1, \ldots, n\}$ für $n \geq 0$ mit der Verabredung, dass für $n = 0$ die leere Menge gemeint ist. Der Inklusionsfunktor ist nach Konstruktion voll; treu ist er ebenfalls. Jede endliche Menge steht in Bijektion zu einer der Standardmengen $\{1, \ldots, n\}$ (dazu müssen Sie nur wissen, wie viele Elemente Ihre Menge enthält) und daher ist die Inklusion auch wesentlich surjektiv, d. h. es liegt eine Skelett vor.

4. (Ko)Limites

Limeskonstruktionen tauchen in vielen Gebieten der Mathematik auf. Wichtige Kolimites sind zum Beispiel pushouts topologischer Räume oder direkte Limites topologischer Räume, die von direkten Systemen von Räumen stammen, die über partiell geordnete Mengen indiziert sind. In der Algebra benutzt man häufig das Produkt von Gruppen und die direkte Summe abelscher Gruppen. Dual dazu kennen Sie eventuell Koprodukte von Gruppen und und Produkte abelscher Gruppen. Für topologische Räume benutzt man oft Faserprodukte (alias pullbacks) und inverse (oder projektive) Limites von inversen Systemen topologischer Räume, die über partiell geordnete Mengen indiziert sind.

Es sei J eine kleine Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Einen Funktor $F\colon J \to \mathcal{C}$ kann man sich vorstellen, als ein Diagramm von Objekten $F(j) = C_j, j \in J$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^J$ die Kategorie der J-Diagramme in $\mathcal{C}$, also die Kategorie aller Funktoren von J nach $\mathcal{C}$.

Je komplizierter die Kategorie J ist, desto interessanter ist das entstehende Diagramm. Was soll also der (Ko)Limes über ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
F(j_1) \arrow[rrr, "F(f_{21})"] \arrow[d, "F(f_{51})"'] & & & F(j_2) \arrow[dl, "F(f_{32})"] \\
F(j_5) \arrow[rr, bend right] & F(j_4) \arrow[ul, "F(j_{14})"'] & F(j_3) \arrow[ur, "F(f_{23})"] &
\end{tikzcd}$$

sein? Existiert so etwas immer?

Man sieht leicht, dass beliebige Kolimites und Limites *nicht* immer existieren können. (Überlegen Sie sich Beispiele!) Definieren kann man sie natürlich. Es sei $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$ der Funktor, der einem Objekt C aus $\mathcal{C}$ das konstante Diagramm zuordnet, also $\Delta(C)(j) = C$ für alle Objekte $C \in \mathcal{C}$ und ist f_{ij} ein beliebiger Morphismus von j nach i in J, so ist $\Delta(C)(f_{ij}) = 1_C$. Ist g ein Morphismus in $\mathcal{C}$ von C nach D, so induziert g eine natürliche Transformation von Funktoren $\Delta_g\colon \Delta(C) \Rightarrow \Delta(D)$.

Definition 4.1. Ein *Kolimes von* $F\colon J \to \mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

- Ein Objekt aus $\mathcal{C}$, genannt $\mathrm{colim}_J F$ und
- einer natürlichen Transformation $\tau\colon F \Rightarrow \Delta(\mathrm{colim}_J F)$.

Diese sind universell unter allen natürlichen Transformationen $\tau'\colon F \Rightarrow \Delta(C)$, d. h. für alle solchen τ' gibt es einen eindeutigen Morphismus $\xi\colon \mathrm{colim}_J F \to C$, sodass $\tau' = \Delta(\xi) \circ \tau$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, Rightarrow, "\tau'"] \arrow[dr, Rightarrow, "\tau"'] & & \Delta(C) \\
& \Delta(\mathrm{colim}_J F) \arrow[ur, Rightarrow, "\Delta(\xi)"'] &
\end{tikzcd}$$

Schreibt man aus, was das bedeutet, so erhält man lokal ein Bild wie

$$\begin{tikzcd}
 & F(k) \arrow[drr, "\tau'_k"] \arrow[ddr, "\tau_k"] & & \\
F(i) \arrow[ur] \arrow[d] \arrow[rrr, "\tau'_i"] \arrow[drr, "\tau_i"] & & & C. \\
F(j) \arrow[urrr, "\tau'_j"] \arrow[rr, "\tau_j"] & & \operatorname{colim}_J F \arrow[ur, dotted, "\xi"'] & \\
 & F(\ell) \arrow[ul] \arrow[ur, "\tau_\ell"] \arrow[uurr, bend right, "\tau'_\ell"'] & &
\end{tikzcd}$$

Der übliche abstract nonsense sagt Ihnen, dass Kolimites bis auf Isomorphie eindeutig sind, wenn sie denn existieren.

Beispiele

Bilden Sie einen Kolimes über eine Kategorie J, die nur Identitätsmorphismen hat, die also diskret ist, so heißt der Kolimes eine **kategorielle Summe** oder das **Koprodukt**. Ist $\mathcal{C}$ die Kategorie Sets und ist $F\colon J \to \mathsf{Sets}$, wobei J diskret ist, so ist zum Beispiel der Kolimes über ein solches J die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{j \in J} F(j)$. Ebenso ist die kategorielle Summe in der Kategorie der topologischen Räume die disjunkte Vereinigung der Einzelräume mit der entsprechenden Topologie.

Pushouts können Sie modellieren, indem Sie für J eine Kategorie der Form $i \leftarrow j \rightarrow k$ wählen.

Eine wichtige Beispielklasse sind die sogenannten **Koegalisatoren**. Dies sind Kolimites von Diagrammen der Form

$$F(j_0) \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} F(j_1)\,.$$

Hier haben wir als J die Kategorie $j_0 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} j_1$, wobei α und β Morphismen in J sind. Der zugehörige Kolimes heißt Koegalisator von $f = F(\beta)$ und $g = F(\alpha)$.

Sie kennen Koegalisatoren: Wir arbeiten in der Kategorie Ab der abelschen Gruppen. Ist R ein Ring mit Eins, M ein Rechts- und N ein Links-R Modul, so ist das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ der Koegalisator des Diagramms

$$M \otimes R \otimes N \overset{\mathrm{id} \otimes \nu'}{\underset{\nu \otimes \mathrm{id}}{\rightrightarrows}} M \otimes N.$$

Hierbei sind die nicht-dekorierten Tensorprodukte über den ganzen Zahlen zu bilden; die Abbildung ν ist die Rechtsmodul-Struktur von M und analog ist ν' die Linksmodulstruktur von N.

Was ist der Koegalisator eines Diagramms der Form $C \overset{f}{\underset{f}{\rightrightarrows}} C$? Wenn Sie wieder in Ab arbeiten, was ist dann der Koegalisator von $A \overset{0}{\underset{f}{\rightrightarrows}} B$?

Als sinnvolle Konvention legt man fest, dass der Kolimes über die leere Kategorie das initiale Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$ ist, sofern dieses existiert.

Limites sind dual zu Kolimites definiert:

Definition 4.2. Ein *Limes von* $F\colon J \to \mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

- Ein Objekt aus $\mathcal{C}$, genannt $\lim_J F$ und
- einer natürlichen Transformation $\tau\colon \Delta(\lim_J F) \Rightarrow F$.

Diese sind universell unter allen natürlichen Transformationen $\tau'\colon \Delta(C) \Rightarrow F$, d. h. für alle solchen τ' gibt es einen eindeutigen Morphismus $\xi\colon C \to \lim_J FC$, sodass

$$\tau' = \tau \circ \Delta(\xi).$$

$$\begin{tikzcd} \Delta(C) \arrow[rr, Rightarrow, "\tau'"] \arrow[dr, Rightarrow, "\Delta(\xi)"'] & & F \\ & \Delta(\lim_J F) \arrow[ur, Rightarrow, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

Sie kennen **Produkte** als Limites über diskrete Kategorien J. **Pullbacks** erhalten Sie für Kategorien J der Form $i \to j \leftarrow k$. Dual zu Koegalisatoren erhalten Sie **Egalisatoren**, d. h. Limites von Diagrammen

$$F(j_0) \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} F(j_1)$$

Sind M und N Links-R-Moduln für einen Ring R, so sind die R-Modulhomomorphismen der Egalisator in der Kategorie Ab des Diagramms

$$\mathrm{Hom}(M, N) \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(R \otimes M, N).$$

Hierbei bezeichnet Hom die Homomorphismen abelscher Gruppen, f ist die Abbildung, die ein $h\colon M \to N$ auf

$$R \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes h} R \otimes N \xrightarrow{\nu_N} N$$

abbildet und g ist die Verkettung

$$R \otimes M \xrightarrow{\nu_M} M \xrightarrow{h} N.$$

Die Abbildungen ν_N, ν_M sind die R-Modulstrukturen von N und M.

Was ist der Egalisator in Ab eines Diagramms $A \overset{0}{\underset{f}{\rightrightarrows}} B$? Sind X, Y Mengen, was ist dann der Egalisator eines Diagrammes $X \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} Y$? (Daher kommt der Name.)

Der Limes über eine leere Kategorie ist das terminale Objekt in $\mathcal{C}$, falls dieses existiert.

Ein wichtiges Beispiel für einen Limes in der Kategorie der Mengen, Sets, oder der Kategorie der topologischen Räume, Top, ist das **Faserprodukt**. Dies ist nichts anderes als der Pullback eines Diagramms

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Ein Modell für diesen Pullback für diese Kategorien ist

$$Z \times_Y X := \{(z, x) \in Z \times X | f(z) = p(x)\},$$

d. h. man sammelt Paare von Elementen, die in Y zusammenpassen. Oft bezeichnet man $Z \times_Y X$ auch als $f^*(p)$, um die Abhängigkeit von den beteiligten Abbildungen zu betonen. Ein wichtiger Spezialfall ist, wenn $f\colon A \hookrightarrow Y$ die Inklusion einer Teilmenge bzw. eines Unterraumes ist. Dann kann man das Faserprodukt mit dem Urbild von A unter p identifizieren.

Es ist nicht selbstverständlich, dass (Ko)Limites existieren. Wenn sie das immer tun in einer Kategorie, dann verdient das einen Namen:

Definition 4.3. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *vollständig*, falls jedes kleine Diagramm in $\mathcal{C}$ einen Limes in $\mathcal{C}$ besitzt. Analog heißt $\mathcal{C}$ *kovollständig*, falls alle kleinen Diagramme in $\mathcal{C}$ Kolimites in $\mathcal{C}$ haben.

Ist eine Kategorie vollständig (kovollständig), so besitzt sie insbesondere ein terminales (initiales) Objekt.

Die Kategorien Ab und Sets sind zum Beispiel vollständig. Die Kategorie der Körper und Körpermorphismen ist nicht vollständig (warum?).

Theorem 4.4. Eine Kategorie ist genau dann vollständig, wenn sie Produkte und Egalisatoren besitzt. Dual dazu ist eine Kategorie genau dann kovollständig, wenn sie Koprodukte und Koegalisatoren besitzt.

Beweis. Wir zeigen die erste Behauptung und Sie überlegen sich, wie Sie die zweite beweisen können.

Ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ vollständig, so hat sie natürlich Produkte und Egalisatoren. Es sei also $F\colon J \to \mathcal{C}$ ein kleines Diagramm und es sei M die Menge der Morphismen in J. Nach Annahme existieren die Produkte $X = \prod_{j \in J} F(j)$ und $Y := \prod_{f\colon i \to j \in M} F(j)$ und diese haben kanonische Projektionsabbildungen

$$p_i\colon X = \prod_{j \in J} F(j) \to F(i)$$

für $i \in J$ und

$$q_f\colon Y = \prod_{f\colon i \to j} F(j) \to F(j).$$

Für ein $f\colon i \to j$ sei $s(f) = i$ und $t(f) = j$. Wir betrachten nun zwei Morphismen $\varphi, \psi\colon X \to Y$, die festgelegt sind durch:

$$q_f \circ \varphi = p_{t(f)}\colon X \to F(t(f)),\ q_f \circ \psi = F(f) \circ p_{s(f)}\colon X \to F(s(f)) \to F(t(f)).$$

Ist τ' nun eine natürliche Transformation $\tau'\colon \Delta(C) \Rightarrow F$, so erhalten wir aus τ' einen Morphismus $T\colon C \to X$ mit $p_i \circ T = \tau'_i$. Für T gilt, dass

$$\varphi \circ T = \psi \circ T,$$

weil komponentenweise gilt

$$p_{t(f)} \circ T = F(f) \circ p_{s(f)} \circ T.$$

Dies übersetzt sich zu

$$\tau'_{t(f)} = F(f)\tau'_{s(f)}$$

und dies ist gerade die Natürlichkeitsbedingung von τ'. Bilden wir den Egalisator

$$E \xrightarrow{\tau} X \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightrightarrows}} Y,$$

so folgt damit, dass E zusammen mit τ die Eigenschaften von $\lim_J F$ erfüllt. $\square$

Wenn Sie Egalisatoren nicht mögen, dann können Sie auch Egalisatoren durch Pullbacks ersetzen:

Lemma 4.5. Egalisatoren existieren, falls binäre Produkte und Pullbacks existieren. Koegalisatoren existieren, falls binäre Koprodukte und Pushouts existieren.

Beweis. Wiederum zeige ich nur die erste Behauptung.

Wir wollen zeigen, dass der Egalisator $E \xrightarrow{\tau} X \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ existiert. Betrachten Sie das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[d, "\mathrm{diag}_Y"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{diag}_X"] & X \times X \arrow[r, "(f,g)"] & Y \times Y. \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung existieren die Produkte $X \times X$ und $Y \times Y$ sowie der Pullback des obigen Diagramms

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dotted, "\varrho_Y"] \arrow[d, dotted, "\varrho_X"'] & & Y \arrow[d, "\mathrm{diag}_Y"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{diag}_X"] & X \times X \arrow[r, "(f,g)"] & Y \times Y. \end{tikzcd}$$

Dann hat das Paar (P, ϱ_X) die universelle Eigenschaft des Egalisators: Ist C ein beliebiges Objekt mit Abbildungen

$$\alpha \colon C \to X,\ \beta \colon C \to Y$$

mit $f\alpha = \beta$ und $g\alpha = \beta$, so gilt auch

$$(f, g) \circ \mathrm{diag}_X \circ \alpha = (f\alpha, g\alpha) = (\beta, \beta) = \mathrm{diag}_Y \circ \beta$$

und daher existiert genau ein Morphismus von C nach P, der die gewünschten Eigenschaften erfüllt. $\square$

Limites und Kolimites vertragen sich gut mit den passenden Hälften adjungierter Funktorpaare:

Theorem 4.6. Ist $\mathcal{D} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ ein adjungiertes Funktorpaar, so erhält L Kolimites und R erhält Limites, d. h. ist $F \colon J \to \mathcal{C}$ ein kleines Diagramm, für dass der Limes $\lim_J F$ existiert, so ist $R(\lim_J F)$ ein Limes des Diagramms $RF \colon J \to \mathcal{D}$. Ist $G \colon J \to \mathcal{D}$ ein kleines Diagramm, für das der Kolimes $\mathrm{colim}_J F$ existiert, so ist $L(\mathrm{colim}_J G)$ ein Kolimes des Diagramms $LG \colon J \to \mathcal{C}$.

Beweis. Es sei $\tau' \colon \Delta(D) \Rightarrow R \circ F$. Die Morphismen $\tau'_j \colon D \to RF(j)$ entsprechen unter der natürlichen Adjunktionsbijektion Morphismen $\varphi^{-1}_{D,F(j)}(\tau'_j) = \sigma_j \colon LD \to F(j)$. Ist $f \colon j \to k$

ein Morphismus in J, so folgt aus der Natürlichkeit, dass $\sigma_k = F(f) \circ \sigma_j$ gilt. Daher gibt es ein eindeutiges $\xi\colon LD \to \lim_J F$, sodass für alle $j \in J$ gilt, $\tau_j \circ \xi = \sigma_j$:

$$\begin{tikzcd}
LD \arrow[rr, "\sigma_j"] \arrow[dr, "\xi"'] & & F(j) \\
& \lim_J F \arrow[ur, "\tau_j"'] &
\end{tikzcd}$$

also insgesamt $\tau \circ \Delta(\xi) = \sigma$. Unter den Adjunktionsbijektionen entspricht ξ einer Abbildung $\tilde{\xi}\colon D \to R(\lim_J F)$ und aus der Natürlichkeit dieser Bijektionen folgt, dass

$$R(\tau_j) \circ \tilde{\xi} = \tau'_j, \forall j \in J, \text{ also } R(\tau) \circ \Delta(\tilde{\xi}) = \tau'.$$

Der Fall linksadjungierter Funktoren und Kolimites ist dual zu dem Behandelten. □

Beispiele

- Vergissfunktoren erhalten also zum Beispiel Produkte (wenn es einen zugehörigen Linksadjungierten gibt), freie Funktoren erhalten Koprodukte. Damit wissen Sie zum Beispiel, was das n-fache Koprodukt einer freien Lie-Algebra auf einem 1-dimensionalen Vektorraum ist, nämlich die freie Lie-Algebra auf einem n-dimensionalen Vektorraum. Die unterliegende Menge eines Produktes von Gruppen ist das Produkt der unterliegenden Mengen.
- Linksadjungierte erhalten initiale und Rechtsadjungierte erhalten terminale Objekte.
- Bezeichnet Fr_n die freie Gruppe auf n Erzeugern und ist $G * G'$ das Koprodukt der Gruppen G und G', so ist
$$*_{i=1}^n \mathrm{Fr}_1 \cong \mathrm{Fr}_n.$$

5. Kanerweiterungen und Monaden

5.1. **(Linke) Kanerweiterungen.** Eine wichtige Konstruktion mit Kolimites sind (linke) Kanerweiterungen.

Definition 5.1. Es seien $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ Funktoren. Die *linke Kanerweiterung von F entlang j* ist ein Paar (K, α), wobei

- $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ein Funktor ist und
- $\alpha\colon F \Rightarrow K \circ j$ eine natürliche Transformation.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[dl, "K"] \\
\mathcal{E} &
\end{tikzcd}$$

Das Paar (K, α) erfüllt die universelle Eigenschaft, dass es für jedes Paar (H, β), bei dem $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ein Funktor ist und $\beta\colon F \Rightarrow H \circ j$ eine natürliche Transformation, genau eine natürliche Transformation $\gamma\colon K \Rightarrow H$ gibt mit $\gamma_j \circ \alpha = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "j"] \arrow[dd, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha\ \Downarrow\beta"] & & \mathcal{D} \arrow[ddll, "K"] \arrow[ddll, bend left, "H"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\gamma"] \\
& \, & \\
\mathcal{E} & &
\end{tikzcd}$$

Natürlich ist es nicht selbstverständlich, dass linke Kanerweiterungen existieren. Wenn ja, dann kann man den Funktor F über die Kategorie $\mathcal{D}$ ausdehnen. Allerdings gilt in der Regel *nicht*, dass $K \circ j = F$ ist, aber die natürliche Transformation α vermittelt zwischen den beiden. Mit ein paar Einschränkungen kann man erreichen, dass α ein natürlicher Isomorphismus ist.

Bevor wir Existenzaussagen für Kan-Erweiterungen kennenlernen, brauchen wir noch eine Hilfskategorie.

Definition 5.2. Es sei $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und D sei ein Objekt aus $\mathcal{D}$. Die Kategorie E_D hat als Objekte Paare (y, C), wobei C ein Objekt in $\mathcal{C}$ ist und $y \in \mathcal{D}(jC, D)$. Ein Morphismus $f\colon (y, C) \to (y', C')$ ist ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(C, C')$, sodass $y' \circ jf = y$ gilt.

Theorem 5.3. Es seien $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ Funktoren, die Kategorie $\mathcal{C}$ sei klein und $\mathcal{E}$ sei kovollständig. Dann existiert die linke Kanerweiterung von F entlang j.

Beweis.

- Zunächst konstruieren wir die Kanerweiterung auf Objekten. Die Kategorie E_D ist klein, weil $\mathcal{C}$ nach Voraussetzung klein ist. Es gibt einen kanonischen Funktor $U\colon E_D \to \mathcal{C}$, der ein Paar (y, C) auf C schickt. Die Kovollständigkeit von $\mathcal{E}$ garantiert, dass der Kolimes $\mathrm{colim}_{E_D}(F \circ U)$ existiert mit Morphismen $\tau^D_{(y,C)}\colon F \circ U(y, C) \to \mathrm{colim}_{E_D} F \circ U$. Wir bezeichnen mit $K(D)$ diesen Kolimes $\mathrm{colim}_{E_D}(F \circ U)$. Damit ist die Kanerweiterung auf Objekten definiert.
- Ist $f\colon D \to D'$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$, so müssen wir festlegen, was $K(f)$ sein soll. Ist (y, C) ein Objekt von E_D, so ist $(f \circ y, C)$ ein Objekt von $E_{D'}$, weil $f \circ y \in \mathcal{D}(jC, D')$. Weiterhin gilt für Morphismen $g\colon (y', C') \to (y, C) \in E_D$, dass g ebenfalls ein Morphismus $g\colon (f \circ y', C') \to (f \circ y, C)$ ist:

  $$\begin{tikzcd}
  jC' \arrow[r, "jg"] \arrow[rr, bend right, "y'"'] & jC \arrow[r, "y"] & D \arrow[r, "f"] & D'.
  \end{tikzcd}$$

  Daher gibt es eine eindeutige induzierte Abbildung

  $$Kf\colon KD = \mathrm{colim}_{E_D}(F \circ U) \to \mathrm{colim}_{E_{D'}}(F \circ U) = KD'$$

  mit der Eigenschaft, dass

  $$Kf \circ \tau^D_{(y,C)} = \tau^{D'}_{(f \circ y, C)}.$$

  Die Eindeutigkeit von Kf garantiert, dass K Komposition von Morphismen respektiert und dass $K(1_D) = 1_{KD}$.

- Für die natürliche Transformation $\alpha\colon F \Rightarrow K \circ j$ setzen wir
$$\alpha_C = \tau^{jC}_{1_{jC},C}.$$
Für die Natürlichkeit betrachten wir für einen Morphismus $h \in \mathcal{C}(C, C')$ das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
F(C) = F \circ U(1_{jC}, C) \arrow[rr, "\alpha_C = \tau^{jC}_{(1_{jC},C)}"] \arrow[d, "F(h)"'] \arrow[drr, "\tau^{jC'}_{(jh,C)}"] & & \operatorname{colim}_{E_{jC}}(F \circ U) = K(jC) \arrow[d, "K(jh)"] \\
F(C') = F \circ U(1_{jC'}, C') \arrow[rr, "\alpha_{C'} = \tau^{jC'}_{(1_{jC'},C')}"] & & \operatorname{colim}_{E_{jC'}}(F \circ U) = K(jC').
\end{tikzcd}$$
Nach Konstruktion gilt $K(jh) \circ \tau^{jC}_{(1_{jC},C)} = \tau^{jC'}_{(jh,C)}$. Da $1_{jC'} \circ jh = jh$ ist, ist $h\colon (jh, C) \to (1_{jC'}, C')$ ein Morphismus in $E_{jC'}$ und wir erhalten
$$\tau^{jC'}_{(jh,C)} \circ F(h) = \tau^{jC'}_{(jh,C)} \circ (F \circ U)(h) = \tau^{jC'}_{(1_{jC'},C')}.$$
- Es sei $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ gegeben mit einer natürlichen Transformation $\beta\colon F \Rightarrow H \circ j$. Wir brauchen eine natürliche Transformation $\gamma\colon K \Rightarrow H$ mit $\gamma_j \circ \alpha = \beta$. Für ein festes D aus $\mathcal{D}$ und $(y, C) \in E_D$ haben wir die Komposition
$$F \circ U(y, C) = F(C) \xrightarrow{\beta_C} H \circ j(C) \xrightarrow{H(y)} HD,$$
weil $y\colon jC \to D$. Man rechnet wieder nach, dass diese Verkettung natürlich ist für Morphismen in E_D und wir erhalten eine eindeutige Faktorisierung
$$\gamma_D\colon KD = \operatorname{colim}_{E_D}(F \circ U) \to HD, \quad \gamma_D \circ \tau^D_{y,C} = H(y) \circ \beta_C. \tag{1}$$
Ist $f\colon D \to D'$, so gilt wegen (1)
$$H(f) \circ \gamma_D \circ \tau^D_{y,C} = H(f) \circ H(y) \circ \beta_C = H(f \circ y) \circ \beta_C,$$
was wiederum nach (1) gleich ist zu
$$\gamma_{D'} \circ \tau^{D'}_{fy,C} = \gamma_{D'} \circ Kf \circ \tau^D_{y,C}$$
und dies impliziert $H(f) \circ \gamma_D = \gamma_{D'} \circ Kf$.
- Es bleibt zu zeigen, dass $\gamma_j \circ \alpha = \beta$ erfüllt ist. Da $\alpha_C = \tau^{jC}_{1_{jC},C}$ ist, bekommen wir mit (1) die Behauptung, weil
$$\gamma_{jC} \circ \tau^{jC}_{1_{jC},C} = H(1_{jC}) \circ \beta_C = \beta_C.$$

$\square$

Beispiele Ist $\mathcal{C} = \mathsf{Fin}$ ein kleines Skelett der Kategorie der endlichen Mengen und ist $\mathcal{D}$ die Kategorie Sets, j die kanonische Inklusion der Unterkategorie Fin in Sets und ist $\mathcal{E}$ eine beliebige kovollständige Kategorie, so besagt Theorem 5.3, dass Sie jeden beliebigen Funktor $F\colon \mathsf{Fin} \to \mathcal{E}$ als Kanerweiterung auf die Kategorie Sets ausdehnen können.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Fin} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "F"] & \mathsf{Sets} \arrow[dl, "K"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

Vorsicht! Es gilt im Allgemeinen nicht, das $K \circ j = F$ ist. Aber oft kann man zumindest die Werte von K kontrollieren. Beispielhaft sei hier das folgende Kriterium gegeben.

Lemma 5.4. Ist $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, $\mathcal{E}$ kovollständig und $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein volltreuer Funktor, so gilt für jeden Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, dass die natürliche Transformation $\alpha\colon F \Rightarrow K \circ j$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Wir zeigen, dass das Objekt $(1_{jC}, C)$ terminal ist in E_{jC}. Es sei also (y, C') ein beliebiges Objekt in E_{jC}, d. h. $y\colon jC' \to jC$. Da j voll ist, ist dieses y von der Form $F(f)$ für ein $f\colon C' \to C$ in $\mathcal{C}$. Dieses f gibt uns einen Morphismus von (y, C') nach $(1_{jC}, C)$ in E_{jC}. Ist $f'\colon (y, C') \to (1_{jC}, C)$ ein weiterer Morphismus in E_{jC}, so erhalten wir

$$jf = 1_{jC} \circ jf = y = 1_{jC} \circ jf' = jf'$$

und wegen der Treuheit von j impliziert dies, dass $f = f'$ ist. Kolimites über Diagramme, deren Indexkategorie ein terminales Objekt hat, ergeben gerade den Funktorwert auf diesem terminalen Objekt. Deshalb erhalten wir

$$KjC = \mathrm{colim}_{E_{jC}}(F \circ U) \cong F \circ U(1_{jC}, C) = F(C).$$

□

Sind alle beteiligten Indexkategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ klein, so kann man linke Kanerweiterungen auch über linksadjungierte Funktoren interpretieren.

Ist $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen kleinen Kategorien, so ergibt das Vorschalten von j einen Funktor zwischen der Kategorie der Funktoren von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{E}$, $\mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, und der Kategorie der Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "j"] \arrow[d, dotted, "j^*G"'] & \mathcal{D} \arrow[dl, "G"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

Ist G ein Objekt in $\mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, so ist $j^*(G) = G \circ j$ ein Objekt in $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Ist $\mathcal{E}$ kovollständig, so wissen wir, dass Kanerweiterungen existieren. Diese induzieren eine Abbildung von $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ nach $\mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ und es gilt.

Theorem 5.5. Für kleine Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und eine kovollständige Kategorie $\mathcal{E}$ hat der Funktor

$$j^*\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

einen Linksadjungierten, der durch die linke Kanerweiterung gegeben ist.

Beweis. Ist (K, α) eine linke Kanerweiterung von F entlang j, so ist (K, α) eine Reflexion von j^*. □

Natürlich können Sie sich selbst überlegen, was rechte Kanerweiterungen sind, wann sie existieren und welche Eigenschaften sie haben – oder Sie schlagen das in [ML] nach.

5.2. **Monaden.** Ist $\mathcal{C}$ eine festgewählte Kategorie, so können wir Endofunktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ betrachten. Diese können Sie durch Hintereinanderausführung verknüpfen. Ist $\mathcal{C}$ klein, so bilden diese Endofunktoren eine Kategorie. Im allgemeinen Fall macht es dennoch Sinn, sich Endofunktoren anzusehen, die sich wie Monoide verhalten:

Definition 5.6. Eine *Monade* in einer Kategorie $\mathcal{C}$ bsteht aus einem Endofunktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ zusammen mit zwei natürlichen Transformationen $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow F$ und $\mu\colon F \circ F \Rightarrow F$, sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} F^3 \arrow[r, Rightarrow, "F\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_F"'] & F^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\ F^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Id} \circ F \arrow[r, Rightarrow, "\eta_F"] \arrow[dr, equal] & F^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] & F \circ \mathrm{Id} \arrow[l, Rightarrow, "F\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & F. & \end{tikzcd}$$

Aus den naheliegenden Gründen nennt man η die *Einheit* der Monade und μ die *Multiplikation*. Die Bezeichnung *Monade* ist relativ gebräuchlich, aber *Tripel* ist ebenfalls im Umlauf.

Morphismen von Monaden sind definiert als natürliche Transformationen $\tau\colon F \Rightarrow F'$, die mit den strukturgebenden natürlichen Transformationen verträglich sind.

Jedes adjungierte Funktorpaar ergibt eine Monade. Wir werden später sehen, dass auch die Umkehrung gilt.

Theorem 5.7. Ist $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "L"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd}$ ein adjungiertes Funktorpaar, so ist der Endofunktor $F = RL\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Monade. Die Transformation $\mu\colon RLRL \Rightarrow RL$ ist gegeben durch $R\varepsilon_L$ und die Transformation $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow F$ für F ist die Einheit der Adjunktion $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow RL$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Diagramme

(2)
$$\begin{tikzcd} RLRLRL \arrow[r, Rightarrow, "RLR\varepsilon_L"] \arrow[d, Rightarrow, "R\varepsilon_{LRL}"'] & RLRL \arrow[d, Rightarrow, "R\varepsilon_L"] \\ RLRL \arrow[r, Rightarrow, "R\varepsilon_L"] & RL \end{tikzcd}$$

und

(3)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id} \circ RL \arrow[r, Rightarrow, "\eta_{RL}"] \arrow[dr, equal] & RLRL \arrow[d, Rightarrow, "R\varepsilon_L"] & RL \circ \mathrm{Id} \arrow[l, Rightarrow, "RL\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & RL & \end{tikzcd}$$

kommutieren. In Diagramm (2) ist ein äußeres R und ein inneres L völlig unbeteiligt, d. h. das Diagramm reduziert sich auf den relevanten Teil

$$\begin{tikzcd} LRLR \arrow[r, Rightarrow, "LR\varepsilon"] \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon_{LR}"'] & LR \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon"] \\ LR \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon"] & \mathrm{Id}, \end{tikzcd}$$

und dieses Diagramm kommutiert.

Die Kommutativität von (3) kann man zeigen, indem man beide Dreiecke getrennt behandelt. Hier folgt die Behauptung dann aus den Identitäten $\mathrm{Id} = R\varepsilon \circ \eta_R \colon R \Rightarrow R$ und $\mathrm{Id} = \varepsilon_L \circ L\eta \colon L \Rightarrow L$. $\square$

Insbesondere geben Vergissfunktoren mit zugehörigen freien Funktoren Monaden auf der unterliegenden Kategorie. Ist zum Beispiel L der Funktor, der einem k-Vektorraum V die freie unitäre kommutative k-Algebra zuordnet, die von V erzeugt wird, und ist R der Vergissfunktor von der Kategorie der unitären kommutativen k-Algebren in die Kategorie der k-Vektorräume, so ist die Komposition RL eine Monade auf der Kategorie der k-Vektorräume.

Adjungierte Funktorpaare geben also Monaden. Wir zeigen im Folgenden, dass *immer* auch die Umkehrung gilt. Zu einer Monade gibt es sogar (mindestens) zwei adjungierte Funktorpaare; wir behandeln eines davon.

Definition 5.8. Ist $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Monade mit Multiplikation μ und Eins η, dann ist eine *F-Algebra* ein Objekt X aus $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Morphismus $\xi \colon FX \to X$, sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} F^2X \arrow[r, "F(\xi)"] \arrow[d, "\mu_X"'] & FX \arrow[d, "\xi"] \\ FX \arrow[r, "\xi"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & FX \arrow[d, "\xi"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Die Abbildung ξ nennt man oft die *Strukturabbildung* der F-Algebra X. Das linke Diagramm gibt eine Assoziativitätseigenschaft, während das rechte eine Bedingung an die Eins stellt. Ein Morphismus von F-Algebren ist ein Morphismus in $\mathcal{C}$, der die Strukturabbildungen respektiert. Wir benutzen F-$\mathsf{alg}_{\mathcal{C}}$ als Bezeichung für die Kategorie der F-Algebren in $\mathcal{C}$.

Beispiele

- Ist $\mathrm{Fr} \colon \mathsf{Sets} \to \mathsf{Gr}$ der Funktor, der einer Menge die freie Gruppe zuordnet, die von dieser Menge erzeugt wird, so ist jede Gruppe G eine Algebra für die Monade $U \circ \mathrm{Fr}$, wenn U der Vergissfunktor von Gruppen in Mengen ist. Der Morphismus $\xi \colon U\mathrm{Fr}(G) \to G$ nimmt ein formales Wort in den Elementen von G und wertet es mithilfe der Gruppenmultiplikation in G aus. Dieses Beispiel ist prototypisch für alle Monaden, die aus adjungierten Funktorpaaren entstehen, bei denen ein Vergissfunktor einen linksadjungierten freien Funktor besitzt.
- Es ist klar, dass FX eine F-Algebra ist für alle Objekte X aus $\mathcal{C}$ (warum?). Solche F-Algebren heißen auch *freie F-Algebren*.

Theorem 5.9. Ist (F, μ, η) eine Monade in $\mathcal{C}$, so gibt es eine Adjunktion

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "L"] & F\text{-}\mathsf{alg}_{\mathcal{C}}. \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd}$$

Hierbei ordnet R einer F-Algebra X mit Strukturabbildung ξ das Objekt X aus $\mathcal{C}$ zu und L bildet ein Objekt X aus $\mathcal{C}$ auf die freie F-Algebra FX ab. Die zugehörige Monade RL ist gerade F.

Beweis. Betrachten wir die Komposition RL angewandt auf ein Objekt X, so erhalten wir

$$RLX = R(FX, \xi\colon F(FX) = (F^2)(X) \xrightarrow{\mu_X} FX) = FX$$

und die Eins der Monade ist gegeben durch $\eta_X\colon X \to RLX = FX$. Umgekehrt ist $LR(X,\xi) = L(X) = (FX, \mu_X)$ und die Strukturabbildung $\xi\colon FX \to X$ ist nach Definition ein Morphismus von F-Algebren

$$\xi\colon (FX, \mu_X) \to (X, \xi).$$

Der Morphismus $\varepsilon_{(X,\xi)}\colon LR(X,\xi) \to (X,\xi)$ ist also gerade durch diese Abbildung von F-Algebren gegeben. Ist $f\colon (X,\xi) \to (X',\xi')$ ein Morphismus von F-Algebren, so verlangen wir gerade, dass

$$\xi' \circ F(f) = f \circ \xi$$

gilt und dies zeigt die Natürlichkeit von $\varepsilon_{(X,\xi)}$. Die Kompositionen $FX \xrightarrow{F\eta_X} FFX \xrightarrow{\mu_X} FX$ und $X \xrightarrow{\eta_X} FX \xrightarrow{\xi} X$ sind jeweils die Identität wegen der Einheitsbedingung für die Monade F bzw. wegen der Einsbedingung für die F-Algebra (X,ξ). □

Beispiele

- Ist R ein assoziativer Ring mit Eins, so ist der Funktor $R \otimes (-)\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ eine Monade auf der Kategorie der abelschen Gruppen. Eine $R \otimes (-)$-Algebra ist gerade ein Links-R-Modul.
- Ähnlich ist für eine Gruppe G der Funktor $G \times (-)\colon \mathsf{Sets} \to \mathsf{Sets}$ eine Monade auf der Kategorie der Mengen. Die $G \times (-)$-Algebren sind gerade G-Mengen, d. h. Mengen, auf denen G operiert.

6. Simpliziale Objekte

Wir betrachten die Menge $\{0, 1, \dots, n\}$ mit ihrer üblichen Anordnung $0 < 1 < \dots < n$ und nennen diese angeordnete Menge $[n]$ für $n \geq 0$.

Definition 6.1. Die *simpliziale Kategorie*, Δ, hat als Objekte die geordneten Mengen $[n], n \geq 0$ und als Morphismen die Abbildungen von Mengen, die ordnungserhaltend sind, also Abbildungen $f\colon [n] \to [m]$, sodass $f(i) \leq f(j)$ gilt, falls $i < j$ ist.

Da es als ordnungserhaltende Bijektion in Δ nur die Identität gibt, hat die Kategorie Δ nur triviale Automorphismen.

Grundbausteine der Morphismenmengen sind die folgenden Abbildungen. Es sei $\delta_i\colon [n-1] \to [n]$ die Inklusion, die den Wert i ausläßt ($0 \leq i \leq n$) und $\sigma_j\colon [n+1] \to [n]$ sei die surjektive Abbildung, die sowohl j als auch $j+1$ auf j abbildet ($0 \leq j \leq n$).

Lemma 6.2. Es gelten die folgenden simplizialen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\delta_j \circ \delta_i &= \delta_i \circ \delta_{j-1}, \quad i < j,\\
\sigma_j \circ \sigma_i &= \sigma_i \circ \sigma_{j+1}, \quad i \leq j,\\
\sigma_j \circ \delta_i &= \begin{cases} \delta_i \circ \sigma_{j-1}, & i < j,\\ 1_{[n]}, & i = j, j+1,\\ \delta_{i-1} \circ \sigma_j, & i > j+1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Lemma 6.3. Jeder Morphismus id $\neq f\colon [n] \to [m]$ in Δ kann eindeutig geschrieben werden als Komposition

$$f = \delta_{i_1} \circ \ldots \circ \delta_{i_r} \circ \sigma_{j_1} \circ \ldots \circ \sigma_{j_s}$$

mit $0 \leq i_r < \ldots < i_1 \leq m$ und $0 \leq j_1 < \ldots < j_s < n$, wobei $m = n - s + r$ ist.

Beweis. Sie können f faktorisieren in eine ordnungserhaltende Surjektion aufs Bild und die Inklusion des Bildes. Die Surjektion drücken Sie durch die σ_j aus und die Inklusion durch die δ_i. Die simplizialen Identitäten garantieren, dass die obige Zerlegung eindeutig ist. □

Definition 6.4. Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Ein *simpliziales Objekt in* $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor von Δ nach $\mathcal{C}$. Ein *kosimpliziales Objekt in* $\mathcal{C}$ ist ein kovarianter Funktor von Δ nach $\mathcal{C}$.

Wie kann man simpliziale Objekte beschreiben? Wir haben also einen Funktor $X\colon \Delta^{op} \to \mathcal{C}$, d. h. für jedes Objekt $[n] \in \Delta$ bekommen wir insbesondere ein Objekt $X([n]) =: X_n$ in $\mathcal{C}$. Da alle Morphismen in Δ als Produkt in den δ_i und σ_j schreibbar sind, reicht es also, $X(\delta_i) =: d_i\colon X_n \to X_{n-1}$ und $X(\sigma_j) =: s_j$ zu kennen. Wenn Sie ein simpliziales Objekt hinschreiben möchten, müssen Sie also nur eine Folge von Objekten $X_0, X_1, \ldots$ und Morphismen in $\mathcal{C}$, d_i, s_j angeben, die das Duale der simplizialen Identitäten erfüllen, also

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i, && i < j, \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i, && i \leq j, \\ d_i \circ s_j &= \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i, & i < j, \\ 1_{[n]}, & i = j, j+1, \\ s_j \circ d_{i-1}, & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ein simpliziales Objekt X kann man sich also vorstellen als ein Diagramm der Form

$$X_0 \;\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; X_1 \;\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; X_2 \quad \ldots,$$

wobei die Abbildungen $\leftarrow$ den d_i entsprechen, während die Abbildungen $\to$ von den s_j stammen. Die d_i nennt man auch *Seitenabbildungen* und die s_j *Ausartungen*. Elemente $x = s_i y \in X_n$ für $y \in X_{n-1}$ nennt man *ausgeartete n-Simplizes*. Warum, sehen wir später.

Wir können also über simpliziale R-Moduln, simpliziale Mengen, simpliziale Ringe, simpliziale topologische Räume etc. reden. Speziell simpliziale Mengen sind wichtig, weil sie topologische Räume modellieren.

Wir können die Morphismen in Δ dazu benutzen, eine simpliziale Menge zu konstruieren, indem wir sagen, dass $\Delta_n\colon \Delta^{op} \to$ Sets der Funktor ist, der $[m]$ auf $\Delta([m], [n])$ abbildet.

Das Yoneda-Lemma besagt nun, dass die natürlichen Transformationen von Δ_n in eine simpliziale Menge X genau der Menge X_n entsprechen.

Definition 6.5. Ist X eine simpliziale Menge X, so ist die *geometrische Realisierung* von X, $|X|$, der topologische Raum

$$|X| = \bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \triangle^n / \sim .$$

Hierbei sind die X_n mit der diskreten Topologie versehen und $\triangle^n$ ist das topologische n-Simplex

$$\triangle^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\}.$$

Die $\triangle^n, n \geq 0$ bilden einen kosimplizialen topologischen Raum mit Strukturabbildungen

$$\delta_i(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})$$

und

$$\sigma_j(t_0, \ldots, t_{n+1}) = (t_0, \ldots, t_j + t_{j+1}, \ldots, t_{n+1}).$$

Die Quotientenbildung ist erzeugt von den Relationen

$$(d_i(x), (t_0, \ldots, t_n)) \sim (x, \delta_i(t_0, \ldots, t_n)), \quad (s_j(x), (t_0, \ldots, t_n) \sim (x, \sigma_j(t_0, \ldots, t_n)).$$

Ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus simplizialer Mengen, also eine natürliche Transformation der entsprechenden Funktoren, so induziert f eine stetige Abbildung $|f|\colon |X| \to |Y|$, indem wir einer Äquivalenzklasse $[(x, t_0, \ldots, t_n)] \in |X|$ die Klasse $[(f(x), t_0, \ldots, t_n)] \in |Y|$ zuordnen. Damit wird die geometrische Realisierung zu einem Funktor aus der Kategorie der simplizialen Mengen in die Kategorie der topologischen Räume.

Ein Element der Form $s_j(x)$ wird also in der geometrischen Realisierung mit etwas in einer Dimension niedriger identifiziert und es 'zählen' nur diejenigen Elemente, die man nicht mehr als $s_j(x)$ ausdrücken kann. Daher stammt die Bezeichnung 'ausgeartet'. Die Verklebung der relevanten Elemente erfolgt über die Seitenabbildungen. Wir nennen ein Element $(y, (t_0, \ldots, t_m)) \in X_m \times \triangle^m$ einen *nicht-ausgearteten Punkt*, falls y nicht ausgearteter Simplex ist und $(t_0, \ldots, t_m) \in \triangle^m$ kein Randpunkt ist. Wir nehmen im folgenden an, dass X nicht leer ist.

Lemma 6.6. Jedes Element $((x, t_0, \ldots, t_n)) \in X_n \times \triangle^n$ ist in $|X|$ äquivalent zu einem eindeutig bestimmten nicht-ausgearteten Punkt.

Beweis. Nach Lemma 6.3 können wir jedes $x \in X_m$ eindeutig schreiben als $x = s_{j_p} \circ \ldots \circ s_{j_1} y$ mit einem nicht-ausgearteten $y \in X_{m-p}$ und $0 \leq j_1 < \ldots < j_p < m$. Wir setzen

$$\psi[(s_{j_p} \circ \ldots \circ s_{j_1} y, t_0, \ldots, t_m)] = [(y, \sigma_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma_{i_p}(t_0, \ldots, t_m))].$$

Ist $(u_0, \ldots, u_n)$ ein Randpunkt in $\triangle^n$ der Form

$$(u_0, \ldots, u_n) = \delta_{i_r} \circ \ldots \circ \delta_{i_1}(v_0, \ldots, v_{n-r}),$$

wobei $(v_0, \ldots, v_{n-r})$ ein innerer Punkt von $\triangle^{n-r}$ ist und $0 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$, so setzen wir

$$\varrho(x, (u_0, \ldots, u_n)) = (d_{i_1} \circ \ldots \circ d_{i_r} x, (v_0, \ldots, v_{n-r})).$$

Damit definieren ϱ und ψ Selbstabbildungen auf $|X|$ und die Komposition $\psi \circ \varrho$ ordnet einem beliebigen Vertreter eines Elements in $|X|$ einen eindeutigen nicht-ausgearteten Vertreter zu, welcher zum Ausgangselement äquivalent ist. $\square$

Damit kann man die topologische Struktur des Raumes $|X|$ genauer beschreiben.

Proposition 6.7. Die Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge X ist ein CW Komplex, der für jeden nicht-ausgearteten n-Simplex eine n-Zelle besitzt.

Beispiele:

1. Die topologische 1-Sphäre ist $[0,1]/0 \sim 1$. Wenn wir das simplizial hinbekommen möchten, können wir versuchen, eine simpliziale Menge $\mathbb{S}^1$ mit einem 0-Simplex, 0, und einem 1-Simplex zu konstruieren. Die simplizialen Identitäten zwingen uns aber das 1-Simplex

$s_0(0)$ auf, sobald wir einen 0-Simplex haben. Wir nehmen noch ein weiteres 1-Simplex dazu und erhalten $\mathbb{S}^1_n \cong [n]$ mit Strukturabbildungen

$$[0] \rightleftarrows [1] \; \substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow} \; [2] \; \ldots,$$

die Sie als Übungsaufgabe bestimmen. Die Randabbildungen kleben den einzigen nicht-ausgearteten 1-Simplex mit seinen Endpunkten an den Nullsimplex und wir erhalten $|\mathbb{S}^1| = \mathbb{S}^1$.

2. Die geometrische Realisierung der darstellbaren simplizialen Menge Δ_n ist $|\Delta_n| = \triangle^n$.

3. Sind X und Y zwei simpliziale Mengen, so ist ihr Produkt $X \times Y$ die simpliziale Menge mit $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$. Die Strukturabbildungen d_i und s_j sind koordinatenweise definiert. Um später Homotopien u. ä. zur Verfügung zu haben, wollen wir die geometrische Realisierung von Produkten verstehen.

Satz 6.8. Sind X und Y simpliziale Mengen, sodass $|X| \times |Y|$ ein CW Komplex ist mit der von $|X|$ und $|Y|$ induzierten CW-Struktur, so gilt

$$|X \times Y| \cong |X| \times |Y|.$$

Das Resultat gilt allgemeiner, falls man gewillt ist, auf dem Produktraum die kompakt-erzeugte Topologie zu nehmen.

Beweis. Die Projektionsabbildungen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ induzieren stetige Abbildungen

$$|p_X| \colon |X \times Y| \to |X|, \quad |p_Y| \colon |X \times Y| \to |Y|,$$

die zusammen eine stetige Abbildung $p \colon |X \times Y| \to |X| \times |Y|$ ergeben. Wir konstruieren eine bijektive Abbildung $|X| \times |Y| \to |X \times Y|$, die stetig ist, falls $|X| \times |Y|$ ein CW Komplex ist. Es sei (z, w) ein Punkt in $|X| \times |Y|$ mit nicht-ausgeartetem Vertreter $(x, (t_0, \ldots, t_n))$ von z und $(y, (u_0, \ldots, u_m))$ von w. Wir bilden die Teilsummen

$$t^i := \sum_{j=0}^{i} t_i, u^i := \sum_{j=0}^{i} u_i.$$

Da einige t_i und u_i null sein können, ist die Folge der Teilsummen nicht streng monoton steigend; ausserdem können einige t^i mit einigen u^j übereinstimmen. Es sei $r^0 < \ldots < r^q = 1$ die streng monotone Anordnung der Elemente in

$$\{t^0, \ldots, t^n\} \cup \{u^0, \ldots, u^m\}.$$

Die r^i können wieder als Teilsummen interpretiert werden, zu denen das Element $(r^0, r^1 - r^0, \ldots, r^q - r^{q-1}) \in \triangle^q$ gehört. Damit können wir $(t_0, \ldots, t_n)$ ausdrücken als $\sigma_{p_1} \circ \ldots \circ \sigma_{p_{n-a}}(r^0, r^1 - r^0, \ldots, r^q - r^{q-1})$ und $(u_0, \ldots, u_m)$ als $\sigma_{\ell_1} \circ \ldots \circ \sigma_{\ell_{m-b}}(r^0, r^1 - r^0, \ldots, r^q - r^{q-1})$. Hierbei sind die Mengen $\{p_1, \ldots, p_{n-a}\}$ und $\{\ell_1, \ldots, \ell_{m-b}\}$ disjunkt und $p_1 < \ldots < p_{n-a}$, $\ell_1 < \ldots < \ell_{m-b}$. Wir definieren

$$\phi \colon |X| \times |Y| \to |X \times Y|$$

als

$$\phi(z, w) = [((s_{p_{n-a}} \circ \ldots \circ s_{p_1} x, s_{\ell_{m-b}} \circ \ldots \circ s_{\ell_1} y), (r^0, r^1 - r^0, \ldots, r^q - r^{q-1}))].$$

Andererseits, falls $w' \in |X \times Y|$ den nicht-ausgearteten Vertreter $((x', y'), (t_0, \ldots, t_n))$ hat, so hat $|p_X| w'$ den nicht-ausgearteten Vertreter $\psi(x', (t_0, \ldots, t_n))$ und ebenso ist $\psi(y', (t_0, \ldots, t_n))$

ein nicht-ausgearteter Vertreter von $|p_Y|w'$. (Das Anwenden von ψ ist nötig, weil zum Beispiel $(x', y') = (s_i x, y')$ sein könnte.) Damit ist

$$\begin{aligned}|p_X|(\phi(z,w)) =&|p_X|([((s_{p_{n-a}} \circ \ldots \circ s_{p_1} x, s_{\ell_{m-b}} \circ \ldots \circ s_{\ell_1} y), (r^0, r^1 - r^0, \ldots, r^q - r^{q-1}))]) \\ =&[\psi((s_{p_{n-a}} \circ s_{p_1} x, (r^0, r^1 - r^0, \ldots, r^q - r^{q-1})))] = [(x, (t_0, \ldots, t_n))] = z\end{aligned}$$

und $|p_Y|(\phi(z,w)) = w$. Zusammen ergibt dies $p \circ \phi = \mathrm{id}$. Für einen nicht-ausgearteten Vertreter $((x', y'), (t_0, \ldots, t_n))$ von $w' \in |X \times Y|$ ist

$$\begin{aligned}\phi \circ p[((x', y'), (t_0, \ldots, t_n))] &= \phi([\psi((x', (t_0, \ldots, t_n)))], [\psi((y', (t_0, \ldots, t_n)))]) \\ &= [((x', y'), (t_0, \ldots, t_n))] = w'.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass ϕ die Umkehrabbildung von p ist.

Dass ϕ stetig ist, falls $|X| \times |Y|$ ein CW-Komplex ist, folgt, weil ϕ auf jedem Produkt von Zellen $[x \times \triangle^n] \times [y \times \triangle^m]$ stetig ist: Auf dem Inneren ist keine Simplexkoordinate null und ϕ sortiert nur um. Läuft eine Koordinate gegen null, so werden zwei aufeinanderfolgende Teilsummen gleich und werden in der Reihung der r^i nur einfach gezählt. Für ϕ bedeutet das das Einfügen einer Abbildung s_k. Gehen mehrere Koordinaten gegen null, so sorgen die simplizialen Identitäten für die Wohldefiniertheit und damit für die Stetigkeit. $\square$

7. Nerv und klassifizierender Raum einer kleinen Kategorie

Definition 7.1.

- Für eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ sei $M_n(\mathcal{C})$ die Menge

$$\{C_0 \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_2} \ldots \xleftarrow{f_n} C_n | \, C_i \in \mathcal{C}, f_i \text{ Morphismus in } \mathcal{C}\}$$

  der n-Tupel komponierbarer Morphismen in $\mathcal{C}$. Für ein Element wie oben schreiben wir kurz $[f_1|\ldots|f_n]$.
- Der *Nerv der Kategorie* $\mathcal{C}$ ist die simpliziale Menge $N\mathcal{C}\colon \Delta^{op} \to \mathrm{Sets}$, die $[n]$ auf die Menge $M_n(\mathcal{C})$ schickt. Die Ausartungen sind durch das Einfügen von Identitätsmorphismen gegeben

$$s_i[f_1|\ldots|f_n] = [f_1|\ldots|f_i|1_{C_i}|f_{i+1}|\ldots|f_n], \quad 0 \le i \le n,$$

  und die Seitenabbildungen durch das Komponieren von Morphismen:

$$d_i[f_1|\ldots|f_n] = \begin{cases} [f_2|\ldots|f_n], & i = 0, \\ [f_1|\ldots|f_i \circ f_{i+1}|\ldots|f_n], & 0 < i < n, \\ [f_1|\ldots|f_{n-1}], & i = n. \end{cases}$$

  Letzteres können Sie sich auch vorstellen als das Weglassen des Objekts C_i.
- Der *klassifizierende Raum von* $\mathcal{C}$, $B\mathcal{C}$, ist die geometrische Realisierung von $N\mathcal{C}$, $|N\mathcal{C}|$.

Die Objekte geben die Punkte in $B\mathcal{C}$, ein Morphismus von C nach C' gibt eine Kante, die zwischen den Punkten läuft, die zu C und C' gehören und ist $g \circ f$ eine Verkettung in $\mathcal{C}$, so gibt diese ein Dreieck mit Kanten, die zu $g \circ f$, g und f gehören. Dreifachverkettungen geben Tetraeder usw.

Der topologische Raum $B\mathcal{C}$ ist immer ein CW-Komplex und ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen kleinen Kategorien induziert eine stetige (zelluläre) Abbildung topologischer Räume

$B(F)\colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$. Damit wird B zu einem Funktor von der Kategorie der kleinen Kategorien in die Kategorie der topologischen Räume.

Beispiele

- Ist X eine Menge und $\mathcal{C}$ die dazugehörige diskrete Kategorie, so ist $B\mathcal{C} = X$ mit der diskreten Topologie.
- Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ zwei kleine Kategorien und ist $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ihr Produkt, so erhält der Nerv Produkte und damit folgt aus Satz 6.8, dass in guten Fällen $B(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') \cong B\mathcal{C} \times B\mathcal{C}'$ ist.
- Ist G eine Gruppe, so ordnen wir G die kleine Kategorie $\mathcal{G}$ zu, die nur ein Objekt $*$ enthält und in der die Morphismen gerade die Elemente aus G sind. Dann heißt $B\mathcal{G}$ der klassifizierende Raum der Gruppe G, BG. Ist G abelsch, so ist die Gruppenverknüpfung ein Homomorphismus und BG ist wieder eine Gruppe. Zum Beispiel ist $B\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

  Trägt G eine Topologie, so können wir diese bei der Bildung von BG berücksichtigen, indem wir $G^n \times \triangle^n$ die Produkttopologie geben.

  So ist zum Beispiel $B\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}P^\infty$, d. h. $\mathbb{C}P^\infty \simeq B(B\mathbb{Z})$.

  Ist G diskret, so ist die Homologie der Gruppe G (mit trivialen Koeffizienten $\mathbb{Z}$) gerade $H_*(BG;\mathbb{Z})$.
- Ist M ein Monoid, so kann man die analoge Konstruktion durchführen.
- Wir können $[n]$ als Kategorie auffassen. Dann ist $B[n] \cong \triangle^n$.

Theorem 7.2.

(1) Eine natürliche Transformation $\tau\colon F \Rightarrow F'$ induziert eine Homotopie zwischen BF und BF'.

(2) Ist $\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ ein adjungiertes Funktorpaar, so ist $B\mathcal{C}$ homotopieäquivalent zu $B\mathcal{D}$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt, weil wir τ als einen Funktor T von $\mathcal{C} \times [1]$ nach $\mathcal{D}$ auffassen können: Auf Objekten setzen wir $T(C,0) = F(C)$ und $T(C,1) = F'(C)$. Für einen Morphismus $f \in \mathcal{C}(C,C')$ sei $T(f,1_0) = F(f)$ und $T(f,1_1) = F'(f)$. Für den einzigen Morphismus $0 < 1$ in $[1]$ setzen wir $T(1_C, 0 < 1) = \tau_C$.

Die Verkettung

$$B\mathcal{C} \times [0,1] \cong B(\mathcal{C} \times [1]) \xrightarrow{\quad B(T) \quad} B\mathcal{D}$$

gibt dann die gewünschte Homotopie.

Für ein adjungiertes Funktorpaar haben wir die natürlichen Transformationen $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow RL$ und $\varepsilon\colon LR \Rightarrow \mathrm{Id}$. Diese geben nach (1) eine Homotopieäquivalenz. □

Korollar 7.3. Hat eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ ein initiales oder terminales Objekt, so ist ihr klassifizierender Raum zusammenziehbar.

Beweis. In beiden Fällen gibt es adjungierte Funktoren zwischen $\mathcal{C}$ und der Kategorie $[0]$ mit einem Objekt und einem Morphismus. □

Betrachten wir zu einer Gruppe G die Translationskategorie von G, d. h. die Kategorie $\mathcal{E}_G$, welche die Elemente von G als Objekte hat und $\mathcal{E}_G(g_1, g_2) = \{g_2 g_1^{-1}\}$, so ist in dieser Kategorie jedes Objekt sowohl initial als auch terminal und $B\mathcal{E}_G$ ist zusammenziehbar.

Ist $\mathcal{C}$ selbst keine kleine Kategorie, aber hat $\mathcal{C}$ ein kleines Skelett $\mathcal{C}'$, so definiert man $B\mathcal{C}$ oft als $B\mathcal{C}'$ (oder arbeitet stillschweigend mit $B\mathcal{C}'$). Im Folgenden sei $\mathcal{C}$ aber als klein vorausgesetzt.

Topologische Invarianten angewandt auf $B\mathcal{C}$ sagen uns etwas über die Kategorie. Auf der Menge der Objekte von $\mathcal{C}$, Ob$\mathcal{C}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt ist von der Relation, die sagt $c \sim c'$, falls es einen Morphismus in $\mathcal{C}$ zwischen c und c' gibt. Zwei Objekte c und $\tilde{c}$ aus $\mathcal{C}$ sind also genau dann äquivalent, wenn es einen endlichen Zickzack von Morphismen aus $\mathcal{C}$ zwischen c und $\tilde{c}$ gibt.

$$
\begin{tikzcd}
& c_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & c_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & c_N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
c & & c_1' & & {} & \cdots & {} & & \tilde{c}
\end{tikzcd}
$$

Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $\pi_0\mathcal{C}$.

Satz 7.4. Die Menge der Wegekomponenten von $B\mathcal{C}$, $\pi_0 B\mathcal{C}$, steht in Bijektion zu $\pi_0\mathcal{C}$.

Dies gilt allgemeiner: Für jeden CW-Komplex können Sie π_0 durch die entsprechende Relation auf den 0-Zellen beschreiben. Ist $\pi_0\mathcal{C}$ einelementig, so nennen wir die Kategorie $\mathcal{C}$ *wegzusammenhängend*.

Ist X eine Menge, auf der eine Gruppe G operiert, so können wir die *Translationskategorie zur G-Operation auf X, $\mathcal{E}_G^X$*, definieren. Als Objekte hat sie die Elemente der Menge X und

$$\mathcal{E}_G^X(x_1, x_2) = \{g \in G | gx_1 = x_2\}.$$

(Mit dieser Notation ist $\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_G^G$.)

Zwei Elemente x und x' sind wegeäquivalent, wenn sie in der gleichen G-Bahn liegen, d. h.

$$\pi_0\mathcal{E}_G^X = X/G.$$

Um eine Beschreibung der Fundamentalgruppe von $B\mathcal{C}$ zu erhalten, brauchen wir das Konzept maximaler Bäume.

Definition 7.5. Es sei X eine beliebige Menge von Morphismen in $\mathcal{C}$.

- Der *Graph von X*, Γ_X, ist der eindimensionale Unterkomplex von $B\mathcal{C}$, der aus den Kanten in $B\mathcal{C}$ besteht, die zu den Morphismen in X gehören.
- Die Teilmenge X heißt *Baum*, falls Γ_X ein Baum ist.
- Ist $\pi_0\mathcal{C}$ trivial, so nennen wir einen Baum X *maximal*, falls jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ als Quelle oder Ziel eines Morphismus in X vorkommt.

Als Anwendung erhält man die folgende Tatsache:

Satz 7.6. Es sei X ein maximaler Baum in einer wegzusammenhängenden kleinen Kategorie $\mathcal{C}$. Die Fundamentalgruppe von $B\mathcal{C}$ (zu einem beliebigen Basispunkt $c_0 \in C$) hat die folgende Präsentierung: Für jeden Morphismus f aus $\mathcal{C}$ gibt es einen Erzeuger $[f]$. Die Relationen sind:

- Ein $[f]$ ist trivial, falls $f \in X$. Zusätzlich ist $[1_C]$ trivial für alle Objekte C aus $\mathcal{C}$.
- Sind $f\colon C_1 \to C_2$ und $g\colon C_2 \to C_3$ Morphismen in $\mathcal{C}$, so ist

$$[g \circ f] = [g][f].$$

Beweis. Das 1-Skelett $B\mathcal{C}^{(1)}$ des CW-Komplexes $B\mathcal{C}$ entspricht dem Graphen Γ auf der Menge aller Morphismen von $\mathcal{C}$ außer den Identitäten. Dessen Fundamentalgruppe ist die freie Gruppe, die von allen Kanten von Γ außerhalb des maximalen Baumes X erzeugt wird. Zelluläre Approximation impliziert, dass die Fundamentalgruppe von $B\mathcal{C}$ isomorph ist zur Fundamentalgruppe des 2-Skeletts, $B\mathcal{C}^{(2)}$. Es entstehen daher nur Relationen, die der Komposition von Morphismen entsprechen. $\square$

Beispiele

- Ist G eine Gruppe und ist $\mathcal{G}$ die Kategorie mit einem Objekt $*$ und $\mathcal{G}(*,*) = G$, so ergibt jedes Gruppenelement $g \in G$ einen Erzeuger. Relationen des ersten Typs gibt es nicht und die der zweiten Art ergeben gerade, dass
$$\pi_1(BG) \cong G.$$
- Ist M ein Monoid und betrachten wir die analoge Kategorie $\mathcal{M}$, so ergibt wiederum jedes Element $m \in M$ einen Erzeuger der Fundamentalgruppe und es gibt nur die Relationen, die von der Verknüpfung bzw. dem neutralen Element stammen. Diese Gruppe treffen wir später in Definition 10.1 wieder.

Ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen kleinen Kategorien, so kann man ein Modell für die (Homotopie-)Faser der Abbildung $BF\colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$ angeben:

Definition 7.7. Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und D sei ein Objekt in $\mathcal{D}$. Die *Komma-Kategorie* F/D hat als Objekte die Paare (C, f), wobei C ein Objekt in $\mathcal{C}$ ist und $f \in \mathcal{D}(FC, D)$. Ein Morphismus von (C, f) nach (C', f') in F/D ist ein Morphismus $g\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$, sodass $f' \circ F(g) = f$.

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[rr, "F(g)"] \arrow[dr, "f"'] & & FC' \arrow[dl, "f'"] \\ & D. & \end{tikzcd}$$

Analog kann man natürlich die Komma-Kategorie $D\backslash F$ definieren, bei der die Morphismen von D in die Bilder unter F gehen.

Es gibt einen Vergissfunktor $U\colon F/D \to \mathcal{C}$, der ein Paar (C, f) auf C schickt und einen Morphismus $g\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$ auf sich.

Satz 7.8. Es gibt eine natürliche Transformation $\tau\colon FU \Rightarrow \Delta(D)$ von FU auf den konstanten Funktor mit Wert D. Daher ist die Abbildung $BF \circ BU$ nullhomotop und es gibt eine stetige Abbildung von $B(F/D)$ in die Homotopiefaser der Abbildung $BF\colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$.

Beweis. Wir definieren $\tau_{(C,f)}\colon FU(C, f) = F(C) \to D$ als f. Damit ist $B(FU)$ homotop zum konstanten Funktor auf das Objekt D. Es sei
$$H\colon B(F/D) \times [0, 1] \to B\mathcal{D}$$
eine passende Homotopie, d. h. $H(x, 0) = B(FU)(x)$ und $H(x, 1) = D$ für alle $x \in B(F/D)$.

Die Konstruktion von $B(F/D)$ in die Homotopiefaser von BF ist Standard. Die Homotopiefaser ist der topologische Raum
$$\mathrm{hfib}(BF) = \{(x, w) \in B\mathcal{C} \times B\mathcal{D}^{[0,1]} | w(0) = BF(x), w(1) = [D] \in B\mathcal{D}\}$$
mit der Abbildung $\mathrm{hfib}(BF) \to B\mathcal{C}$, die auf die erste Koordinate projiziert.

Wir setzen

$$\xi\colon B(F/D) \to \mathrm{hfib}(BF)$$

als $\xi(y) = (BU(y), H(y, -))$. Das tut's. □

Ein wichtiges Theorem von Quillen [Q, Theorem A] besagt, dass die Abbildung $BF\colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$ eine Homotopieäquivalenz ist, falls für alle Objekte D aus $\mathcal{D}$ der Raum $B(F/D)$ zusammenziehbar ist.

8. Symmetrisch monoidale Kategorien

Im folgenden betrachten wir Kategorien $\mathcal{C}$, die Zusatzstrukturen besitzen, welche Auswirkungen auf die Qualität des topologischen Raumes $B\mathcal{C}$ haben.

Definition 8.1. Eine *strikt monoidale Kategorie* $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ ist eine Kategorie $\mathcal{C}$, die einen Bifunktor

$$\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

besitzt, der assoziativ ist und der das Objekt e aus $\mathcal{C}$ als strikte Links- und Rechtseinheit für $\otimes$ besitzt:

$$\otimes \circ (\otimes \times \mathrm{Id}) = \otimes \circ (\mathrm{Id} \times \otimes)\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \otimes \circ (e \times \mathrm{Id}) = \otimes \circ (\mathrm{Id} \times e) = \mathrm{Id},$$

wobei $e \times \mathrm{Id}$ für den Funktor

$$e \times \mathrm{Id}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

steht, der ein Objekt C aus $\mathcal{C}$ auf (e, C) schickt und einen Morphismus $f \in \mathcal{C}(C, C')$ auf $(1_e, f)$ abbildet. Der Funktor $\mathrm{Id} \times e$ ist analog definiert.

Wir fordern hier Gleichheit von Funktoren, d. h. zum einen, dass wir Gleichheit auf Objekten haben, dass also

$$C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3) = (C_1 \otimes C_2) \otimes C_3$$

für alle Objekte C_1, C_2, C_3 aus $\mathcal{C}$ gilt. Darüberhinaus gilt diese Gleichheit aber auch für Morphismen in $\mathcal{C}$:

$$f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$$

für alle Morphismen in f, g, h in $\mathcal{C}$.

Die Bedingung, dass $\otimes$ ein Bifunktor ist, bedeutet auf Objekten, dass es für je zwei Objekte C_1, C_2 aus $\mathcal{C}$ ein Objekt $C_1 \otimes C_2$ in $\mathcal{C}$ gibt und dass für die Identitätsmorphismen und für die Komposition von Morphismen

$$1_{C_1} \otimes 1_{C_2} = 1_{C_1 \otimes C_2}, (f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

gilt. Insbesondere erhält man für Morphismen $f\colon C_1 \to C_1'$ und $g\colon C_2 \to C_2'$, dass

$$f \otimes g = (f \otimes 1_{C_2'}) \circ (1_{C_1} \otimes g) = (1_{C_1'} \otimes g) \circ (f \otimes 1_{C_2}).$$

Beispiele

- Ist M ein gewöhnliches Monoid, so können wir die diskrete Kategorie, die die Elemente aus M als Objekte hat, als strikt monoidale Kategorie auffassen, wenn wir als $\otimes$ die Multiplikation in M benutzen.

- Es sei Fin wieder das Skelett der Kategorie der endlichen Mengen mit Objekten $[n] = \{1, \dots, n\}$ für $n \geq 0$ mit $[0] = \varnothing$. Als strikt monoidale Struktur können wir
$$[n] \otimes [m] := [n + m]$$
setzen mit $e = [0]$. Auf Morphismen $f \colon [n] \to [n']$ und $g \colon [m] \to [m']$ definieren wir $f \otimes g \colon [n + m] \to [n' + m']$, indem wir die Werte von g hochsetzen.

Da viele relevante Beispiele nicht die strengen Anforderungen der Definition 8.1 erfüllen, betrachtet man häufiger eine abgeschwächte Variante des Begriffs, bei der die Assoziativität und die Bedingung an die Einheit nur bis auf kohärente Isomorphismen gelten.

Definition 8.2. Eine *monoidale Kategorie* ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Bifunktor $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und mit natürlichen Strukturisomorphismen α, λ, ρ wie folgt:
$$\alpha_{C_1,C_2,C_3} \colon C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3) \cong (C_1 \otimes C_2) \otimes C_3, \quad \forall C_1, C_2, C_3$$
$$\lambda_C \colon e \otimes C \cong C, \quad \rho \colon C \otimes e \cong C, \quad \forall C.$$
Zusätzlich gelten drei Kohärenzbedingungen:

(1) Der natürliche Isomorphismus α erfüllt das Pentagon-Axiom, d. h. das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
& (C_1 \otimes C_2) \otimes (C_3 \otimes C_4) \arrow[rr, "\alpha_{C_1 \otimes C_2, C_3, C_4}"] & & ((C_1 \otimes C_2) \otimes C_3) \otimes C_4 \arrow[dr, "\alpha_{C_1,C_2,C_3} \otimes 1_{C_4}"] & \\
C_1 \otimes (C_2 \otimes (C_3 \otimes C_4)) \arrow[ur, "\alpha_{C_1,C_2,C_3 \otimes C_4}"] \arrow[drr, "1_{C_1} \otimes \alpha_{C_2,C_3,C_4}"] & & & & (C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3)) \otimes C_4 \\
& & C_1 \otimes ((C_2 \otimes C_3) \otimes C_4) \arrow[urr, "\alpha_{C_1, C_2 \otimes C_3, C_4}"] & &
\end{tikzcd}$$
kommutiert für alle $C_1, \dots, C_4$ aus $\mathcal{C}$.

(2) Die natürlichen Isomorphismen λ und ρ erfüllen das Dreiecks-Axiom, d. h. das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
C_1 \otimes (e \otimes C_2) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "1_{C_1} \otimes \lambda_{C_2}"'] & & (C_1 \otimes e) \otimes C_2 \arrow[dl, "\rho_{C_1} \otimes 1_{C_2}"] \\
& C_1 \otimes C_2 &
\end{tikzcd}$$
kommutiert für alle C_1, C_2 aus $\mathcal{C}$.

(3) Für e gilt
$$\lambda_e = \rho_e \colon e \otimes e \to e.$$

Die Natürlichkeitsbedingungen besagen, dass die Strukturisomorphismen für alle Objekte in $\mathcal{C}$ gelten und dass sie kompatibel mit den Morphismen in $\mathcal{C}$ sind.

Ein nicht-triviales Resultat (siehe [ML, VII.2]) besagt, dass mit den Forderungen aus Definition 8.2 auch jedes andere nur denkbare Kohärenzdiagramm kommutiert. Monoidale Kategorien werden auch oft Tensorkategorien genannt.

Beispiele monoidaler Kategorien gibt es wie Sand am Meer und Sie kennen etliche:

- Die Kategorie der Mengen zusammen mit dem gewöhnlichen Produkt von Mengen als Bifunktor und der einpunktigen Menge als Eins.
- Die Kategorie der Mengen zusammen mit der disjunkten Vereinigung von Mengen als Bifunktor und der leeren Menge als Eins.

- Die Kategorie Vekt_K der K-Vektorräume zusammen mit der direkten Summe von K-Vektorräumen als Bifunktor und dem Nullvektorraum als Eins, bzw. mit dem Tensorprodukt von K-Vektorräumen und dem K-Vektorraum K als Eins.

In den oben genannten Beispielen gibt es noch mehr Struktur, nämlich einen natürlichen Isomorphismus, der die Reihenfolge der Objekte C_1, C_2 in $C_1 \otimes C_2$ vertauscht.

Definition 8.3. Eine *symmetrisch-monoidale Kategorie* besteht aus einer monoidalen Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, e; \alpha, \lambda, \rho)$ zusammen mit einem natürlichen Isomorphismus τ mit $\tau_{C_1,C_2} \colon C_1 \otimes C_2 \cong C_2 \otimes C_1$ für C_1, C_2 aus $\mathcal{C}$, der die folgenden Axiome erfüllt.

(1) Für alle C_1, C_2 aus $\mathcal{C}$ gilt: $\tau_{C_2,C_1} \circ \tau_{C_1,C_2} = 1_{C_1 \otimes C_2}$.
(2) Für alle C aus $\mathcal{C}$ gilt: $\rho_C = \lambda_C \circ \tau_{C,e} \colon C \otimes e \cong C$.
(3) Der natürliche Isomorphismus τ ist kompatibel mit α in dem Sinne, dass für alle Objekte C_1, C_2, C_3 das Sechseck-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& (C_1 \otimes C_2) \otimes C_3 \arrow[r, "\tau_{C_1 \otimes C_2, C_3}"] & C_3 \otimes (C_1 \otimes C_2) \arrow[dr, "\alpha_{C_3,C_1,C_2}"] & \\
C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3) \arrow[ur, "\alpha_{C_1,C_2,C_3}"] \arrow[dr, "1_{C_1} \otimes \tau_{C_2,C_3}"] & & & (C_3 \otimes C_1) \otimes C_2 \\
& C_1 \otimes (C_3 \otimes C_2) \arrow[r, "\alpha_{C_1,C_3,C_2}"] & (C_1 \otimes C_3) \otimes C_2 \arrow[ur, "\tau_{C_1,C_3} \otimes 1_{C_2}"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkungen.

- Man nennt eine symmetrisch monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ *geschlossen*, falls jeder der Funktoren $(-) \otimes C$ (für $C \in \mathcal{C}$) einen rechtsadjungierten Funktor $(-)^C$ hat. Ein Beispiel für eine geschlossene Kategorie ist die Kategorie der R-Moduln für einen kommutativen Ring R mit Eins. Die Morphismenmengen in dieser Kategorie tragen selbst die Struktur eines R-Moduls und der Rechtsadjungierte zum Funktor $(-) \otimes M \colon R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ ist der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$.
- Bei Funktoren zwischen monoidalen Kategorien ist es natürlich sinnvoll zu verlangen, dass ein Funktor die monoidale Struktur respektiert. Hier gibt es wiederum Abstufungen. Ein *lax monoidaler Funktor* $F \colon (\mathcal{C}, \otimes, e) \to (\mathcal{D}, \Box, e')$ ist ein Funktor $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, sodass es zu je zwei Objekten C_1, C_2 aus $\mathcal{C}$ einen Morphismus

$$\varphi_{C_1,C_2} \colon F(C_1) \Box F(C_2) \to F(C_1 \otimes C_2)$$

gibt und für die Einheiten e und e' gibt es einen Morphismus

$$\eta \colon e' \to F(e).$$

Diese Morphismen machen die folgenden Diagramme kommutativ (für alle Objekte):

$$\begin{tikzcd}
F(C_1)\Box(F(C_2)\Box F(C_3)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "1\Box\varphi_{C_2,C_3}"'] & (F(C_1)\Box F(C_2))\Box F(C_3) \arrow[d, "\varphi_{C_1,C_2}\Box 1"] \\
F(C_1)\Box(F(C_2\otimes C_3)) \arrow[d, "\varphi_{C_1,C_2\otimes C_3}"'] & (F(C_1\otimes C_2))\Box F(C_3) \arrow[d, "\varphi_{C_1\otimes C_2,C_3}"] \\
F(C_1\otimes(C_2\otimes C_3)) \arrow[r, "F(\alpha_{\mathcal{C}})"] & F((C_1\otimes C_2)\otimes C_3),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(C)\Box e' \arrow[r, "\rho^{\mathcal{D}}_{F(C)}"] \arrow[d, "1_{F(C)}\Box\eta"'] & F(C) \\
F(C)\Box F(e) \arrow[r, "\varphi_{C,e}"] & F(C\otimes e), \arrow[u, "F(\rho^{\mathcal{C}}_C)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e'\Box F(C) \arrow[r, "\lambda^{\mathcal{D}}_{F(C)}"] \arrow[d, "\eta\Box 1_{F(C)}"'] & F(C) \\
F(e)\Box F(C) \arrow[r, "\varphi_{e,C}"] & F(e\otimes C) \arrow[u, "F(\lambda^{\mathcal{C}}_C)"']
\end{tikzcd}$$

Ein lax monoidaler Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *stark monoidal*, falls die Strukturmorphismen φ und η natürliche Isomorphismen sind und F heißt *strikt monoidal*, falls φ und η Identitäten sind.

Sind die beteiligten Kategorien symmetrisch, so ist ein *lax symmetrisch monoidaler Funktor* ein lax monoidaler Funktor F der zusätzlich zu den Eigenschaften oben noch erfüllt, dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(C_1)\Box F(C_2) \arrow[r, "\tau^{\mathcal{D}}_{F(C_1),F(C_2)}"] \arrow[d, "\varphi_{C_1,C_2}"'] & F(C_2)\Box F(C_1) \arrow[d, "\varphi_{C_2,C_1}"] \\
F(C_1\otimes C_2) \arrow[r, "F(\tau_{C_1,C_2})"] & F(C_2\otimes C_1)
\end{tikzcd}$$

für alle Objekte kommutieren. Kommutieren diese Diagramme und ist F stark monoidal, so heißt F *stark symmetrisch monoidal* und ist F strikt monoidal, so heißt F *strikt symmetrisch monoidal*. Es macht keinen Sinn, die Symmetriebedingung zu verschärfen.

- In (symmetrisch) monoidalen Kategorien kann man (kommutative) Monoide definieren. Kommutative Monoide in der Kategorie der R-Moduln für einen kommutativen Ring R sind kommutative R-Algebren. Sie kennen weitere Beispiele.
- Neben symmetrisch monoidalen Kategorien gibt es auch *verzopfte Kategorien*; dies sind monoidale Kategorien zusammen mit einem natürlichen Isomorphismus $\beta_{C_1,C_2}\colon C_1\otimes C_2 \to C_2\otimes C_1$ für alle Objekte C_1, C_2, aber es wird nicht verlangt, dass β Ordnung zwei hat. Zusätzlich soll sich β mit den Einheitsisomorphismen und Assoziativitätsisomorphismen vertragen. Details finden Sie in [ML, XI.1].

9. H-Raum Eigenschaften klassifizierender Räume

Ziel dieses Abschnitts ist es, herauszuarbeiten, welche topologischen Konsequenzen monoidale Strukturen für den klassifizierenden Raum der Kategorie haben.

Definition 9.1. Ein *H-Raum* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einem gewählten Punkt $p \in X$ und einer stetigen Abbildung $\mu\colon X \times X \to X$, sodass die beiden Abbildungen

$$X \cong \{p\} \times X \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

und

$$X \cong X \times \{p\} \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

homotop zur Identität sind. Ein H-Raum heißt *assoziativ*, falls μ assoziativ bis auf Homotopie ist, und er heißt *kommutativ*, falls μ homotopie-kommutativ ist. Wir nennen einen H-Raum *gruppenähnlich*, falls es eine stetige Abbildung $\chi\colon X \to X$ gibt, sodass $\mu \circ (\mathrm{id} \times \chi) \circ \Delta$ homotop zur Identität ist. Hierbei ist Δ die Diagonalabbildung.

Um pathologische Situationen auszuschließen, sollte man zusätzlich verlangen, dass (X, p) wohlpunktiert ist (d. h., dass die Inklusion von p in X eine Kofaserung ist).

Jeder punktierte Schleifenraum ist ein gruppenähnlicher H-Raum: Ist Y ein topologischer Raum mit Grundpunkt y_0 und ist

$$\Omega Y := \mathsf{Top}((\mathbb{S}^1, 1), (Y, y_0))$$

der punktierte Schleifenraum auf Y (mit der ko-Topologie), so ergibt das Aneinanderhängen von Schleifen eine homotopie-assoziative Multiplikation und die Zeitumkehr von Schleifen gibt ein Homotopieinverses. Höhere Schleifenräume

$$\Omega^n Y := \mathsf{Top}((\mathbb{S}^n, 1), (Y, y_0)), n \geq 2,$$

sind ebenfalls gruppenähnliche H-Räume, die zusätzlich homotopie-kommutativ sind. Die Abbildung μ wird von der Pinch-Abbildung

$$\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$$

induziert, die den Äquator abdrückt.

Theorem 9.2. Ist $\mathcal{C}$ eine kleine symmetrisch monoidale Kategorie, sodass $B\mathcal{C} \times B\mathcal{C}$ die kanonische CW Struktur trägt, dann ist $B\mathcal{C}$ ein assoziativer und kommutativer H-Raum.

Beweis. Wir definieren die Multiplikation μ als

$$\begin{tikzcd} B\mathcal{C} \times B\mathcal{C} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\mu"'] & B(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \arrow[d, "B(\otimes)"] \\ & B\mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

Als Grundpunkt wählen wir $p = [e] \in B\mathcal{C}^{(0)} \subset B\mathcal{C}$. Die beiden natürlichen Isomorphismen λ und ρ fassen wir als natürliche Transformationen zwischen den Funktoren

$$\mathcal{C} \cong \{e\} \times \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mu} \mathcal{C}$$

und dem Identitätsfunktor beziehungsweise

$$\mathcal{C} \cong \mathcal{C} \times \{e\} \hookrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mu} \mathcal{C}$$

und dem Identitätsfunktor auf. Damit erhalten wir die gewünschten Homotopien für $\{p\}$ als Homotopie-Eins. Der natürliche Assoziativitätsisomorphismus α ist eine natürliche Transformation zwischen $\otimes \circ (\mathrm{Id} \times \otimes)$ und $\otimes \circ (\otimes \times \mathrm{Id})$ und macht $B\mathcal{C}$ somit zu einem assoziativen

H-Raum. Die Homotopie-Kommutativität folgt aus den Eigenschaften von τ: Dies liefert eine Homotopie zwischen $\otimes$ und $\otimes \circ (1,2)$, wobei $(1,2)\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ die Permutation der Faktoren bezeichnet. $\square$

Wir können für symmetrisch monoidale Kategorien auf $\pi_0(\mathcal{C})$ die Struktur eines abelschen Monoids definieren, indem wir setzen

$$[C] + [D] := [C \otimes D]. \tag{4}$$

Hierbei ist $0 = [e]$.

Beispiele:

- Es sei Iso die Kategorie mit Objekten $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\mathrm{Iso}(n,m) = \begin{cases} \Sigma_n, & m = n, \\ \varnothing, & m \neq n. \end{cases}$$

  Diese Kategorie ist symmetrisch monoidal mit

$$n \otimes m := n + m,$$

  wobei $\tau_{n,m} \in \Sigma_{n+m}$ der Shuffle ist, der die ersten n Elemente in $\{1, \dots, n+m\}$ auf die letzten n Elemente schickt. Es ist $\pi_0(\mathrm{Iso}) = \mathbb{N}_0$. Jede Komponente hat ein Objekt und die entsprechende symmetrische Gruppe als Endomorphismen. Deshalb ist

$$B\mathrm{Iso} \cong \bigsqcup_{n \geq 0} B\Sigma_n.$$

  Die H-Raum Struktur ist hier durch die Inklusion

$$\Sigma_m \times \Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_{m+n}$$

  induziert.
- Analog dazu sei R ein assoziativer Ring mit Eins und Iso_R sei die Kategorie, die wiederum als Objekte die Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ hat und als Morphismen

$$\mathrm{Iso}_R(n,m) = \begin{cases} GL_n(R), & m = n, \\ \varnothing, & m \neq n. \end{cases}$$

  Jede Komponente hat ein Objekt und die entsprechende $GL_n(R)$ als Endomorphismen. Deshalb ist

$$B\mathrm{Iso}_R \cong \bigsqcup_{n \geq 0} BGL_n R.$$

  Die H-Raum Struktur ist hier durch die Blocksumme von Matrizen

$$GL_m(R) \times GL_n(R) \hookrightarrow GL_{m+n}(R)$$

  induziert.

10. Grayson-Quillen Konstruktion

Wir wollen eine Kategorie $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ konstruieren, sodass es einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ gibt und sodass $\pi_0(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C})$ die Grothendieckgruppe des abelschen Monoids $\pi_0(\mathcal{C})$ ist.

Definition 10.1. Es sei M ein abelsches Monoid. Dann ist die Grothendieck-Gruppe auf M, $\mathrm{Gr}(M)$, eine abelsche Gruppe zusammen mit einem Morphismus von Monoiden $j\colon M \to \mathrm{Gr}(M)$, welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt. Ist G eine Gruppe und ist $f\colon M \to G$ ein Morphismus von Monoiden, so gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $f'\colon \mathrm{Gr}(M) \to G$ mit

$$f' \circ j = f.$$

Grothendieck-Gruppen kann man explizit konstruieren: Betrachten Sie das Produkt $M \times M$ und definieren Sie die Verknüpfung komponentenweise. Schreiben wir M additiv, so ist also

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) := (m_1 + m_2, n_1 + n_2).$$

Wir definieren nun die Äquivalenzrelation der stabilen Äquivalenz auf $M \times M$: Ein Paar (m_1, n_1) sei äquivalent zu einem Paar (m_2, n_2), falls es ein $\ell \in M$ gibt mit

$$m_1 + n_2 + \ell = m_2 + n_1 + \ell.$$

Die Addition ist wohldefiniert auf Äquivalenzklassen und jede Klasse der Form $[(m, m)]$ ist neutral. Somit ist das additive Inverse der Klasse eines Paares (m, n) die Klasse des Paares (n, m). (Stellen Sie sich (m, n) als $m - n$ vor.)

Natürlich ist die Grothendieck-Gruppe auf $(\mathbb{N}_0, +)$ die abelsche Gruppe der ganzen Zahlen. In diesem Fall ist die Abbildung von Monoiden $j\colon \mathbb{N}_0 \to \mathrm{Gr}(\mathbb{N}_0)$ injektiv. Dies ist nicht immer der Fall, trifft aber zu, falls M die Kürzungseigenschaft hat, d. h. falls aus $m + p = n + p$ für $m, n, p \in M$ schon $m = n$ folgt. Die Zuordnung $M \mapsto \mathrm{Gr}(M)$ definiert einen Funktor von der Kategorie der abelschen Monoide in die Kategorie der abelschen Gruppen; dieser ist linksadjungiert zum Vergissfunktor. Man kann $\mathrm{Gr}(M)$ auch konstruieren als Quotient der freien abelschen Gruppe, die von M erzeugt wird:

$$\mathrm{Gr}(M) = \mathrm{Fra}(M)/\langle (m + n) - (m) - (n) \rangle.$$

In diesem Modell schreiben wir $[m]$ für die Äquivalenzklasse von m in $\mathrm{Gr}(M)$. Ein Element in $\mathrm{Gr}(M)$ ist die Klasse einer Summe $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i [m_i]$ mit ganzen Zahlen α_i und $m_i \in M$. Wenn Sie die Elemente in der Summe nach nicht-negativen bzw. negativen Summanden sortieren, sehen Sie, dass Elemente der Form $[m] - [n]$ für $m, n \in M$ die Gruppe $\mathrm{Gr}(M)$ erzeugen.

Eine ähnliche Konstruktion hat Quillen für Kategorien [G] definiert.

Definition 10.2. Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine symmetrisch monoidale Kategorie. Es sei $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ die Kategorie, die als Objekte Paare von Objekten in $\mathcal{C}$ hat. Morphismen von (C_1, D_1) nach (C_2, D_2) in $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ sind Äquivalenzklassen von Paaren von Morphismen

$$(f\colon C_1 \otimes E \to C_2, g\colon D_1 \otimes E \to D_2),$$

wobei E ein Objekt aus $\mathcal{C}$ ist. Ein solches Paar ist äquivalent zu

$$(f'\colon C_1 \otimes E' \to C_2, g'\colon D_1 \otimes E' \to D_2),$$

falls es einen Isomorphismus $h \in \mathcal{C}(E, E')$ gibt, sodass

$$\begin{tikzcd}
(C_1 \otimes E, D_1 \otimes E) \arrow[rr, "{(1_{C_1}\otimes h, 1_{C_2}\otimes h)}"] \arrow[dr, "{(f,g)}"'] & & (C_1 \otimes E, D_1 \otimes E) \arrow[dl, "{(f',g')}"] \\
& (C_2, D_2) &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für $E = e$ erhalten wir insbesondere für jedes Paar von Morphismen in $\mathcal{C}$ einen Morphismus in $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$.

Lemma 10.3. Die obige Konstruktion liefert eine symmetrisch monoidale Kategorie $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$, die einen symmetrisch monoidalen Funktor $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ besitzt und für die $\pi_0\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ eine abelsche Gruppe ist.

Beweis. Dass $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ eine Kategorie ist, rechnen Sie nach. Die symmetrisch monoidale Struktur definieren wir koordinatenweise als

$$(C_1, D_1) \otimes (C_2, D_2) := (C_1 \otimes C_2, D_1 \otimes D_2).$$

Für die Natürlichkeit dieses Bifunktors brauchen wir, dass $\mathcal{C}$ *symmetrisch* monoidal ist.

Wir definieren $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ auf Objekten als $j(C) = (C, e)$ und auf Morphismen $f\colon C \to C'$ als $j(f) = [(f, 1_e)]$, wobei wir strenggenommen die Komposition

$$(C \otimes e, e \otimes e) \cong (C, e) \xrightarrow{(f,1_e)} (C', e)$$

betrachten.

In $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ gibt es die Kette von Morphismen

$$(C, D) \otimes (D, C) = (C \otimes D, D \otimes C) \xrightarrow{(1_{C\otimes D}, \tau_{D,C})} (C \otimes D, C \otimes D) \longleftarrow (e, e).$$

Daher ist die Menge der Wegekomponenten $\pi_0(B\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C})$ eine abelsche Gruppe, weil das Inverse der Klasse von (C, D) die Klasse von (D, C) ist. $\square$

Damit ist $Bj\colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ eine Abbildung assoziativer und kommutativer H-Räume und die induzierte Abbildung

$$\pi_0(Bj)\colon \pi_0(B\mathcal{C}) \to \pi_0(B\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C})$$

ist eine Abbildung abelscher Monoide.

Definition 10.4. Ist $\mathcal{C}$ eine kleine symmetrisch monoidale Kategorie, so ist der *K-Theorie-Raum von* $\mathcal{C}$, $K\mathcal{C}$, definiert als $K\mathcal{C} := B(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C})$ und die n-te K-Theoriegruppe von $\mathcal{C}$, $K_n\mathcal{C}$, ist

$$K_n\mathcal{C} := \pi_n B(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}).$$

Wir erhalten, dass sich zumindest schon einmal $K_0\mathcal{C}$ anständig verhält.

Lemma 10.5. Ist $\mathcal{C}$ eine kleine symmetrisch monoidale Kategorie, so gilt

$$K_0(\mathcal{C})) = \pi_0(K\mathcal{C}) \cong \mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{C})).$$

Beweis. Betrachte die Abbildung von der Menge der Objekte in $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ in die Grothendieck-gruppe auf $\pi_0(\mathcal{C})$, die gegeben ist durch

$$\phi\colon (C,D) \mapsto [C]-[D].$$

Für ein festes Objekt E aus $\mathcal{C}$ ist

$$\phi(C\otimes E, D\otimes E) = [C\otimes E]-[D\otimes E] = [C]+[E]-[D]-[E] = [C]+[D] = \phi(C,D).$$

Ist $[(f,g)]\colon (C_1,D_1) \to (C_2,D_2)$ ein Morphismus in $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$, d. h. es gibt ein E aus $\mathcal{C}$ und Morphismen $f\colon C_1\otimes E \to C_2$ und $g\colon D_1 \otimes E \to D_2$ in $\mathcal{C}$, so ist

$$\phi(C_1,D_1) = [C_1]-[D_1] = [C_2]-[D_2] = \phi(C_2,D_2).$$

Damit faktorisiert ϕ über $\pi_0(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C})$ und wir erhalten eine induzierte Abbildung

$$\bar{\phi}\colon \pi_0(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}) \to \mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{C})).$$

Sie ist surjektiv, weil Elemente der Form $[C]-[D]$ die Gruppe $\mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{C}))$ erzeugen. Ist $\phi(C,D)=0$, so sind die Klassen von $[C]$ und $[D]$ in $\pi_0(\mathcal{C})$ äquivalent, es gibt also einen endlichen Zickzack von Morphismen zwischen C und D in $\mathcal{C}$. Diesen Zickzack können Sie recyclen für einen Zickzack in $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ zwischen (C,D) und (D,D), sodass die Klasse von (C,D) in $\pi_0(\mathcal{C}^{-1}C)$ trivial ist.

□

Die Abbildung $\bar{\phi}$ ist invers zur universellen Abbildung

$$\mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{C})) \to \pi_0(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}).$$

Definition 10.6. Ist X ein kommutativer und assoziativer H-Raum, dann ist eine *Gruppenvervollständigung von* X ein kommutativer und assoziativer H-Raum Y zusammen mit einer Abbildung von H-Räumen $f\colon X\to Y$, sodass $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ das abelsche Monoid $\pi_0(Y)$ als Grothendieck Gruppe von $\pi_0(X)$ identifiziert und sodass $H_*(Y) \cong \pi_0(X)^{-1}H_*(X)$ gilt.

Ist X wie oben, so ist seine singuläre Homologie ein assoziativer, graduiert kommutativer Ring mit Eins mit der Multiplikation

$$H_p(X)\otimes H_q(X) \to H_{p+q}(X\times X) \to H_{p+q}(X).$$

Hierbei ist die erste Abbildung die Künneth-Abbildung und die zweite ist durch die H-Raum Struktur $\mu\colon X\times X \to X$ gegeben. Insbesondere ist $H_*(X)$ ein graduierter $H_0(X)$-Modul und $H_0(X)$ ist der Gruppenring $\mathbb{Z}[\pi_0(X)]$. Damit können wir den Ring $H_*(X)$ an $\pi_0(X)$ lokalisieren. Die Anforderung der Definition einer Gruppenvervollständigung ist nun, dass diese Lokalisierung isomorph ist zur Homologie von Y.

Um Pathologien auszuschließen, sollte man verlangen, dass X und Y CW-Komplexe sind. Ist X selbst schon ein gruppenähnlicher H-Raum, so ist jede Gruppenvervollständigung von X homotopieäquivalent zu X.

Theorem 10.7. [G] Ist $\mathcal{C}$ ein kleines Gruppoid, welches symmetrisch monoidal ist, und ist für jedes Objekt $C\in\mathcal{C}$ der Funktor

$$(-)\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$$

treu, so ist $B\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ eine Gruppenvervollständigung von $B\mathcal{C}$.

In den Beispielen Iso und Iso_R erhält man, dass π_0 der Gruppenvervollständigung $\mathbb{Z}$ ist und

$$B(\mathrm{Iso}^{-1}\mathrm{Iso}) \simeq \Omega B\left(\bigsqcup_{n\geq 0} B\Sigma_n\right)$$

beziehungsweise

$$B(\mathrm{Iso}_R^{-1}\mathrm{Iso}_R) \simeq \Omega B\left(\bigsqcup_{n\geq 0} BGL_n(R)\right).$$

Letzteres ist die klassische Definition des K-Theorie Raumes des Ringes R nach Quillen.

Ist M ein abelsches topologisches Monoid und sei M_i die Wegekomponente von M, die zu $i \in \pi_0(M)$ gehört. Dann gilt unter einigen Annahmen an M, dass die natürliche Abbildung

$$M \to \Omega BM,$$

die adjungiert ist zur Abbildung

$$\Sigma M \to BM, \quad [t,m] \mapsto [m,(t,1-t)],$$

eine Gruppenvervollständigung ist [A, §3.2]. Aus Satz 7.4 folgt, dass für abelsche Monoide M gilt, dass $\pi_1(BM) \cong \mathrm{Gr}(M)$. Als Beispiele hatten wir

$$M = \sqcup_{n=0}^{\infty} B\Sigma_n, \quad M = \sqcup_{n=0}^{\infty} BGL_n(R).$$

11. Aufgaben

(1) Betrachten Sie zwei Gruppen G, G' und die Kategorien CG und CG', die jeweils nur ein Objekt haben und als Morphismen gerade die Elemente der jeweiligen Gruppe. Was ist ein Funktor F von CG nach CG'? Wann gibt es eine natürliche Transformation zwischen zwei solcher Funktoren F, F'?
(2) Überlegen Sie sich ein Beispiel für einen Funktor, der zwar volltreu ist, aber kein Isomorphismus von Kategorien.
(3) Definieren Sie, was ein Epimorphismus in einer Kategorie ist, und untersuchen Sie die Abbildung von kommutativen Ringen mit Eins von den ganzen in die rationalen Zahlen.
(4) Erinnern Sie sich an die Definition projektiver Moduln oder schlagen Sie sie nach. In welchem Sinne sind darstellbare Funktoren projektive Objekte?
(5) Es sei k ein Körper. Was ist der linksadjungierte Funktor zum Vergissfunktor von der Kategorie der unitären assoziativen k-Algebren in die Kategorie der k-Vektorräume? Beweisen Sie Ihre Antwort. Wie ändert sich die Situation, wenn Sie unitäre assoziative und kommutative Algebren betrachten? Wie sieht dann der Linksadjungierte aus?
(6) Es sei U der Vergissfunktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen. Hat U einen Links- und/oder Rechtsadjungierten?
(7) In welchem Sinne sind adjungierte Funktoren eindeutig? Suchen Sie sich Ihre eigene Notation für einen Funktor mit zwei Adjungierten (jeweils zwei rechts und links) und beschreiben Sie die Eindeutigkeit so genau wie möglich.
(8) Kann man die Tatsache, dass ein Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ einen Rechtsadjungierten hat, durch Darstellbarkeit von Funktoren ausdrücken?

(9) Es seien R und S zwei kommutative Ringe mit Eins. Was ist ihre kategorielle Summe in der Kategorie aller kommutativen unitären Ringe? Ändert sich das Koprodukt, wenn Sie stattdessen die Kategorie der assoziativen (nicht-notwendig kommutativen) Ringe mit Eins betrachten?
(10) Es sei X eine partiell geordnete Menge (aufgefasst als Kategorie natürlich) und a, b seien Elemente von X. Was ist das Koprodukt bzw Produkt von a und b? Existieren beide immer?
(11) Beschreiben Sie pushouts in der Kategorie der Gruppen. Konstruieren Sie ein nicht-triviales Beispiel für einen leeren pullback in der Kategorie der Mengen. Was passiert, wenn eine Abbildung im Diagramm surjektiv ist?
(12) Wir hatten gesehen, wie man Kerne und Kokerne als Limites bzw. Kolimites beschreiben kann. Kann man Bilder über einen Kolimes oder Limes beschreiben?
(13) Es sei J eine kleine Kategorie, die ein terminales Objekt besitzt und F sei ein beliebiger Funktor von J in eine Kategorie $\mathcal{C}$. Was ist dann der Kolimes von F über J?
(14) Dehnen Sie einen Funktor vom kleinen Skelett der endlichen Mengen aus auf die Kategorie aller Mengen. Wie sieht die linke Kanerweiterung aus? Betrachten Sie zum Beispiel den Funktor, der eine n-elementige Menge auf den $\mathbb{R}^n$ schickt und der auf Morphismen eine Abbildung zwischen endlichen Mengen auf die lineare Abbildung schickt, die auf den Standardbasisvektoren durch die Mengenabbildung gegeben ist.
(15) Betrachten Sie die Zuordnung, die eine Menge auf ihre Potenzmenge abbildet. Ist diese Zuordnung in einem geeigneten Kontext eine Monade?
(16) Betrachten Sie eine partiell geordnete Menge P als Kategorie. Was ist eine Monade auf P?
(17) Konstruieren Sie aus einer Monade auf einer Kategorie $\mathcal{C}$ ein kosimpliziales Objekt in $\mathcal{C}$.
(18) Rechnen Sie nach, dass die geometrischen Realisierungen der 1-Sphäre und der darstellbaren Funktoren $\triangle^n$ wirklich das sind, was ich behauptet habe.
(19) Zeigen Sie, dass die geometrische Realisierung ein Koegalisator ist. Beweisen Sie, dass sie als Funktor von simplizialen Mengen in topologische Räume einen Rechtsadjungierten hat und beschreiben Sie diesen explizit.
(20) Definieren Sie für jedes nicht-negative n eine simpliziale Menge, deren geometrische Realisierung in kanonischer Weise dem Rand des topologischen Standard-n-Simplex entspricht.
(21) Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{C}^o$ die zu $\mathcal{C}$ duale Kategorie. Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus zwischen $B\mathcal{C}$ und $B\mathcal{C}^o$ gibt. Stammt dieser (immer) von einem Funktor zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^o$? D. h. ist B voll?
(22) Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathsf{Fun}(\mathcal{C})$ die Kategorie ihrer Endofunktoren. Ist diese (strikt) monoidal? Gibt es Symmetrien/Verzopfungen?
(23) Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten (Koprodukten). Ist $\mathcal{C}$ dann immer symmetrisch monoidal?
(24) Betrachten Sie die Kategorie mit einem Objekt und einem Monoid als Morphismenmenge. Wann ist diese mit der naheliegenden Struktur monoidal? Was heißt dies für klassifizierende Räume von Gruppen?

(25) Es sei M ein abelsches Monoid. Wann ist die Abbildung in die Grothendieck-Gruppe auf M injektiv? Geben Sie ein Beispiel an für ein nicht-triviales abelsches Monoid mit trivialer Grothendieckgruppe.

Literatur

[A] John Frank Adams, *Infinite loop spaces*, Annals of Mathematics Studies, 90. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1978) x+214 pp.

[B] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra I,II: Basic Category Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press (1994).

[G] Daniel Grayson, *Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen)*, Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Lecture Notes in Math., Vol. 551, Springer, Berlin (1976), 217–240.

[ML] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics. 5. 2nd ed., Springer (1998).

[Q] Daniel G. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, in: Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin (1973), 85–147.

[Sch] Horst Schubert, Kategorien. I, II, Heidelberger Taschenbücher, Bände 65, 66, Springer (1970).