Taylorapproximationen und kubische Konstruktionen von Γ-Moduln

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Birgit Richter

aus

Dortmund

Bonn 2000

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent: Prof. C.-F. Bödigheimer
2. Referent: Prof. V. Franjou

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

ISSN 0524-045X

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Themen dieser Arbeit ergeben sich aus dem Interesse, die kubische Konstruktion besser zu verstehen: Eilenberg und MacLane haben diese in den 50er Jahren in [E-M2] definiert. Die kubische Konstruktion $Q_*(A)$ einer abelschen Gruppe A ist ein Kettenmodell des Eilenberg-MacLane-Spektrums $H(A)$ von A: Die Homologie von $Q_*(A)$ ergibt

$$H_k Q_*(A) \cong \operatorname{colim}_n H_{k+n}(K(A,n)).$$

Für abelsche Gruppen ist die kubische Konstruktion $Q_*(A)$ ein Kettenkomplex; für einen Ring R kann man $Q_*(R)$ zusätzlich mit der Struktur eines differentiell graduierten Ringes versehen. Diese Ringstruktur ermöglicht die Definition einer wichtigen Invariante für Ringe, der MacLane Homologie.

MacLane-(Ko)Homologie eines Ringes R mit Koeffizienten in einem R-Bimodul M ist definiert als die Hochschild-(Ko)Homologie der differentiell graduierten Algebra $Q_*(R)$ mit Koeffizienten in M:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{HML}_*(R,M) & := & \mathrm{Hoch}_*(Q_*(R),M) \\ \mathrm{HML}^*(R,M) & := & \mathrm{Hoch}^*(Q_*(R),M) \end{array}$$

Ein guter Überblick über MacLane-Homologie ist in [Lo, Kapitel 13] gegeben. Diese (Ko)Homologietheorie ist eine feinere Invariante für Ringe als gewöhnliche Hochschild-Homologie; die zweite MacLane-Kohomologie $\mathrm{HML}^2(R,M)$ klassifiziert zum Beispiel alle Erweiterungen des Ringes R durch den Bimodul M, und nicht wie Hochschild-Theorie nur die Erweiterungen $0 \to M \to E \to R \to 0$, bei denen E als abelsche Gruppe in $M \oplus R$ zerfällt. MacLane-Homologie ist eine wirkliche Verfeinerung der Hochschild-Homologie: Falls der Ring die rationalen Zahlen enthält, so stimmen beide Homologietheorien überein. Über eine Augmentationsabbildung $\eta : Q_*(R) \to R$ erhält man Abbildungen zwischen der MacLane- und Hochschild-Theorie:

$$\begin{array}{rcl} \eta_* : \mathrm{HML}_*(R,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hoch}_*(R,M) \\ \eta^* : \mathrm{Hoch}^*(R,M) & \longrightarrow & \mathrm{HML}^*(R,M). \end{array}$$

Für einen Ring R und einen R-Bimodul M ist MacLane-Homologie isomorph zu stabiler K-Theorie $K^s_*(R,M)$ von Waldhausen und zu topologischer Hochschild-Homologie $\mathrm{THH}_*(R,M)$. Diese Isomorphismen wurden in [D-McC] und [P-W] bewiesen. Dabei ist stabile K-Theorie definiert als die Homologie der Homotopiefaser der Abbildung $\mathrm{BGL}(R) \longrightarrow \mathrm{BGL}(R)^+$ mit lokalen Koeffizienten in den Matrizen über M, $\mathrm{Mat}(M)$. Stabile K-Theorie ist damit eine Zwischenstufe zur Berechnung der Homologie der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(R)$ mit lokalen Koeffizienten in den Matrizen über M: Es gibt eine Serre-Spektralsequenz

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{BGL}(R)^+, K^{st}_q(R, M)) \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{GL}(R), \mathrm{Mat}(M))$$

Die Spektralsequenz degeneriert für diese Faserung schon im E^2-Term; d.h. die Homologie der $\mathrm{GL}(R)$ mit lokalen Koeffizienten in $\mathrm{Mat}(M)$ läßt sich durch die Homologie der $\mathrm{GL}(R)$ mit trivialen Koeffizienten in der stabilen K-Theorie von R mit Koeffizienten in M berechnen.

Stabile K-Theorie – und damit auch MacLane-Homologie – approximiert algebraische K-Theorie besser als gewöhnliche Hochschild-Homologie: Die Dennis'sche Spurabbildung

$$\begin{tikzcd}
K_n(R) = \pi_n(\mathrm{BGL}(R)^+) \arrow[rr, "\text{Hurewicz}"] \arrow[dddd, dashed] & & H_n(\mathrm{BGL}(R)^+) \arrow[d, "\cong"] \\
& & H_n(\mathrm{GL}(R)) \arrow[d] \\
& & \\
K^{st}_n(R, R) \cong \mathrm{HML}_n(R, R) \arrow[drr, dashed] & & \mathrm{Hoch}_n(k[\mathrm{GL}(R)], k[\mathrm{GL}(R)]) \arrow[d] \\
& & \mathrm{Hoch}_n(R, R)
\end{tikzcd}$$

aus der K-Theorie einer k-Algebra R in die Hochschild-Homologie von R faktorisiert über stabile K-Theorie und MacLane-Homologie.

Die Q-Konstruktion als Teil des Taylorturms

In dieser Arbeit betrachte ich die Q-Konstruktion über die „Linearisierung“ P_1 des Funktors $\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\} : \Gamma \to Ab$ von der Kategorie der endlichen punktierten Mengen Γ in die Kategorie der abelschen Gruppen. Dieser Funktor ordnet einer endlichen punktierten Menge $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Elementen der Menge A^n zu. Die erste Approximation eines Funktors ist homologisch immer linear, d.h. es gilt

$$H_*P_1(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})([n] \vee [m]) \cong H_*P_1(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})([n]) \oplus H_*P_1(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})([m])$$

Entscheidend ist also der Wert des Homologiefunktors $H_*P_1(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})$ ausgewertet auf dem Objekt [1]; der zugrundeliegende Kettenkomplex ist die kubische Konstruktion von A:

$$Q_*(A) = P_1(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})([1]).$$

Allgemein gehört die Q-Konstruktion in den Kontext der Approximation von Funktoren.

Ziel der Approximationstheorie ist es, einen Funktor F durch eine Folge „einfacherer“ Funktoren anzunähern. Ähnlich zu der Taylorreihe einer Funktion in der Infinitesimalrechnung kann man einen Funktor F durch einen Taylorturm approximieren. In Analogie zum n-ten Taylorpolynom sollte man sich die Approximationsschritte P_nF als polynomiale Ersetzungen von F vom Grad n vorstellen.

T. Goodwillie hat dieses Konzept der Taylorapproximation für Endofunktoren topologischer Räume in [Go] entwickelt. Zu Funktoren F, die schwache Homotopieäquivalenzen erhalten, assoziiert man einen Taylorturm,

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & P_nF \arrow[d] \\
 & P_{n-1}F \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] \\
F \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[uur] \arrow[uuur] & P_1F \arrow[d] \\
 & P_0F = F(*)
\end{tikzcd}$$

so daß der Turm in einem geeigneten Sinne gegen F konvergiert und so daß die P_nF Approximationen vom Grad n an F sind.

M. Weiss hat in [We] eine Taylorapproximation für Räume mit koordinatenfreier Filtrierung definiert und untersucht. „Räume mit koordinatenfreier

Filtrierung" sind Funktoren, die endlich-dimensionale Skalarprodukträume auf punktierte Räume abbilden. Für Funktoren auf additiven Kategorien bzw. Funktoren von punktierten Kategorien in abelsche Kategorien haben B. Johnson und R. McCarthy in [J-McC1] und [J-McC3] eine Approximationstheorie entwickelt.

Taylorapproximation von Funktoren kann man dazu benutzen, um über die Ableitungen von Funktoren Aussagen über die Funktoren selbst zu beweisen. Es gelang z.B. in [McC], mit Methoden der Differentialrechnung für Funktoren aus [Go2] zu zeigen, daß der p-adische Homotopietyp von relativer K-Theorie in günstigen Fällen aus relativer topologischer zyklischer Homologie TC gewonnen werden kann.

In dieser Arbeit beschreibe ich die Taylorapproximation von Γ-Moduln, also Funktoren von endlichen punktierten Mengen in eine Kategorie von R-Moduln, R-Mod. Solche Funktoren kann man gradweise auf simpliziale Mengen ausdehnen und erhält damit Funktoren von simplizialen Mengen in simpliziale Moduln und mittels des Vergißfunktors Endofunktoren simplizialer Mengen.

Die Hauptresultate der Arbeit sind eine explizite Beschreibung der Homologie der Approximationsschritte im Taylorturm für Γ-Moduln (Abschnitt 4) und die Konstruktion einer E_∞-Struktur auf der kubischen Konstruktion für kommutative Ringe (Abschnitt 6). Des weiteren gelingt eine Querverbindung zu einer Homologietheorie für E_∞-Ringspektren und darüber eine konkrete Berechnung dieser sehr komplizierten Theorie in dem grundsätzlichen Beispiel einer Polynomalgebra (Abschnitt 4.3).

Funktoren, die von einer diskreten Kategorie starten, bieten natürlich den Vorteil, daß man kombinatorische Hilfsmittel zur Verfügung hat, um Berechnungen durchzuführen. In [P2] hat T. Pirashvili eine Dold-Kan-Korrespondenz zwischen der Kategorie der Γ-Moduln und der Kategorie der Ω-Moduln bewiesen. Dabei ist Ω die Kategorie der endlichen Mengen und Surjektionen. Das vereinfacht Betrachtungen, weil man häufig nur die Mischeffekte (siehe 2.4.1) eines Funktors kennen muß. Da die Zielkategorie abelsch ist, kann man außerdem den ganzen Apparat der homologischen Algebra benutzen. Ich erhalte als ein Hauptresultat der Arbeit eine explizite Beschreibung der Homologie der Approximationsschritte

$$H_* P_n F : \Gamma \to R - \mathrm{Mod}$$

ausgewertet auf Objekten $[m] = \{0, 1, \ldots, m\} \in \Gamma$ als abgeleitete Funktoren:

Theorem 4.2.3

$$H_* P_n F[1] \cong \mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, F).$$

Hierbei ist t^n ein Funktor vom Grad n. Auf Objekten $[m] \in \Gamma$ ist $t^n[m]$ isomorph zum freien R-Modul erzeugt von allen nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, m\}$ mit Mächtigkeit kleiner oder gleich n.

Für $n = 1$ genügt es, die Homologie auf dem Objekt $[1]$ zu kennen; für die höheren Approximationsstufen benötigt man zusätzlich die Homologie auf Mengen mit mehreren Elementen. Diese Homologiegruppen erhält man, indem man den Funktor F vorher faltet:

Proposition 4.2.10

$$H_* P_n F[m] \cong H_* P_n F^{\vee m}[1] \cong \mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, F^{\vee m}).$$

Die m-fache Faltung $F^{\vee m}$ des Funktors F ist durch $F^{\vee m}(X_+) = F\left(\bigvee_m X_+\right)$ definiert.

Die Homologie der Homotopiefasern $D_n F_* := \mathrm{cone}_{*+1}(P_n F \to P_{n-1} F)$ hat ein Beschreibung in 4.2.8 durch eine ähnliche Formel. Indem man in die Kategorie der Ω-Vektorräume für die Berechnung dieser Homologiegruppen hinüberwechselt, erhält man aus der Tatsache, daß in der Kategorie Ω jeder Endomorphismus ein Isomorphismus ist, eine Auflösung und darüber eine Hyperhomologie-Spektralfolge für die Berechnung:

Theorem 4.5.3
Es gibt eine Spektralsequenz, die gegen die Homologie der n-ten Homotopiefaser der Approximation konvergiert

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\substack{n_0 > \cdots > n_{p-1} > n \\ \lambda \in \Pi(n_0, \cdots, n_{p-1}, n)}} H_q(\Sigma_\lambda, cr(F)(\underline{n_0})) \Longrightarrow H_{p+q}(D_n F)([1]).$$

Dabei erstreckt sich die Summe über eine gewisse Menge iterierter Partitionen. Mit Hilfe dieser Spektralfolge führe ich einige Berechnungen für niedrige Approximationsstufen durch.

Ein Anwendungsgebiet der Berechnungen der Homologie der Homotopiefasern ist Hochschild-Homologie höherer Ordnung. Ich verwende in 4.4.2 die vollständige Berechnung der Homologie der Homotopiefasern einer bestimmten Familie homogener Funktoren ψ_k in Charakteristik 0 dazu, Hochschild-Homologie gerader Ordnung einer abgeschnittenen Polynomalgebra zu berechnen.

Die Betrachtung der Linearisierung $P_1(-)$ führt zu interessanten Querverbindungen zu anderen Gebieten; so zum Beispiel zu einer Homologietheorie für E_∞-Algebren, der Gamma-Homologie. Für eine kommutative Algebra A ist die Gamma-Homologie $H^\Gamma_*(A, M)$ von A mit Koeffizienten in einem A-Modul M als $\mathrm{Tor}^\Gamma_*(t, \mathcal{L}(A, M))$ berechenbar, also als Homologie der ersten Taylorapproximation des Γ-Moduls $\mathcal{L}(A, M)$, der eine endliche punktierte Menge $[n]$ auf das Tensorprodukt $M \otimes A^{\otimes n}$ abbildet.

In 4.3.3 gebe ich die Gamma-Homologie einer Polynomalgebra in Charakteristik zwei in einer Unbestimmten an und stelle in 4.3.4 eine Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz für die Berechnung von Gamma-Homologie auf. Es sei A eine augmentierte kommutative k-Algebra.

Proposition 4.3.6
Es gibt eine Spektralsequenz, die im E^2-Term mit André-Quillen-Homologie von A tensoriert mit der Gamma-Homologie der Polynomalgebra in einer Unbestimmten startet und die gegen die Gamma-Homologie von A konvergiert:

$$E^2_{*,*} = H^\Gamma_*(k[x], k) \otimes AQ_*(A, k) \Longrightarrow H^\Gamma_*(A, k).$$

Modellkategoriestrukturen für den Taylorturm

Die Kategorie der Γ-Kettenkomplexe mit Objekten $F : \Gamma \longrightarrow Ch(R)$ trägt eine natürliche Filtrierung nach dem homologischen Grad von Funktoren. Die Kategorie der Γ-Kettenkomplexe hat eine Modellkategorie-Struktur ähnlich zu der Modellstruktur auf Kettenkomplexen von R-Moduln. Im Abschnitt 3.2 gebe ich Lokalisierungen dieser Modellstruktur an, die jeweils an einen Approximationsschritt des Taylorturmes angepaßt sind. Diese Lokalisierungen führt man mit Methoden von Bousfield und Friedlander [B-F] bzw. Goerss-Jardine [Go-J] durch, indem man die homologische Idempotenz der Transformationen $P_n(-)$ ausnutzt.

Für jede Stufe n der Approximation gibt es eine Modellstruktur $\mathcal{T}_n$, so daß gerade die Funktoren mit homologischem Grad n fibrant sind. Insbesondere bilden die Transformationen P_n einen beliebigen Γ-Modul auf ein fibrantes Objekt in $\mathcal{T}_n$ ab.

Das Duale der Steenrod-Algebra

Ein sehr wichtiges Beispiel ist der Funktor $St : \Gamma \to \mathbb{F}_2 - \text{Vekt}$ von endlichen punktierten Mengen in die Kategorie der $\mathbb{F}_2$-Vektorräume. Dieser Funktor bildet ein $[n]$ aus Γ auf $\mathbb{F}_2\{\overline{\mathbb{F}}_2\{[n]\}\}$ ab. Setzt man den Γ-Vektorraum St auf simpliziale Mengen fort, so ist seine Homotopie $\pi_* St(\mathbb{S}^n)$ gleich der $\mathbb{F}_2$-Homologie von Eilenberg-MacLane Räumen. Die Homologie von $P_1(St)[1]$ ist gleich $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(t, St)$, und dieses ist wiederum isomorph zur stabilen Homotopie des erweiterten Funktors

$$\mathrm{Tor}_*^\Gamma(t, St) \cong \pi_*^{st}(St),$$

wie Pirashvili in [P3, Proposition 2.2] gezeigt hat. Daher ist $H_* P_1(St)[1]$ gerade das Duale der Steenrod-Algebra. Die Homologie der höheren Approximationsschritte

$$H_* P_n St[1] \cong \mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, St)$$

kann man daher als höhere Analoga des Dualen der Steenrod-Algebra interpretieren. Ich zeige in 4.6, daß der Γ-Vektorraum St in einfache Funktoren zerfällt

$$St \cong \bigoplus_{i \geq 0} \psi_i.$$

Diese Funktoren ψ_i sind homogen vom Grad i und besitzen Koszul-ähnliche Auflösungen (siehe 4.4). Diese Aufspaltung des Funktors St benutze ich, um in Abschnitt 5.5 die erste Homologie aller kubischen Konstruktionen Q_*^n auf $\mathbb{F}_2$ mit $\mathbb{F}_2$-Koeffizienten zu berechnen.

Eigenschaften der kubischen Konstruktionen

Die Homologiegruppen der höheren kubischen Konstruktionen $Q_*^n(R)$ eines Ringes R

$$H_* Q_*^n(R) = H_* P_n \mathbb{Z}\{\overline{R}\{-\}\}([1]) \cong \mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, \mathbb{Z}\{\overline{R}\{-\}\})$$

haben eine Interpretation als Homologieoperationen: Zum einen operieren sie auf der Homologie der n-ten kubischen Konstruktion eines Endofunktors von R-Moduln und zum anderen gilt der folgende Satz:

Satz 5.6.3
Ist F ein Funktor von R-Moduln in die Kategorie der Kettenkomplexe über R und ist $F \circ L$ homologisch vom Grad n, so operiert $H_*P_nSt[1]$ auf der Homologie von $F \circ L$. Der Funktor L nimmt hierbei von einer punktierten endlichen Menge X_+ den freien R-Modul auf den Elementen von X.

In 5.3 zeige ich, daß jede Q-Konstruktion $Q_*^n(R)$ für einen kommutativen Ring R mit Eins selbst die Struktur einer Operade trägt. Dies hat zur Folge, daß $Q_*^n(R)$ eine Homotopie-Gerstenhaber-Algebra ist.

Die E_∞-Struktur der Q-Konstruktionen

Eine herausragende Eigenschaft der kubischen Konstruktionen auf Ringen ist ihre multiplikative Struktur. Für einen Ring R ist $Q_*(R)$ über das sogenannte Dixmier-Produkt ein differentiell graduierter Ring. Dies ist die Grundlage für die Definition der MacLane-Homologie eines Ringes R als Hochschild-Homologie der zugehörigen Q-Konstruktion $Q_*(R)$. Geht man von einem kommutativen Ring R aus, so ist die Multiplikation auf der kubischen Konstruktion $Q_*(R)$ nicht mehr kommutativ, aber sie ist kommutativ bis auf höhere Homotopien:

Theorem 6.4.4
Für einen kommutativen Ring R ist die Q-Konstruktion $Q_*(R)$ eine E_∞-Algebra.

Diese Aussage läßt sich auf die höheren kubischen Konstruktionen ausdehnen. Die höheren kubischen Konstruktionen eines Ringes R haben ein Produkt, das sie zu differentiell graduierten Ringen macht. Für kommutative Ringe führt dies wiederum zu einer E_∞-Struktur. Als Teil des Taylorturms des Funktors $\mathbb{Z}\{\overline{R}\{-\}\}$ erhält man also für kommutatives R eine Sequenz von E_∞-Algebren:

$$\cdots \longrightarrow Q_*^n(R) \longrightarrow Q_*^{n-1}(R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_*^2(R) \longrightarrow Q_*^1(R) = Q_*(R).$$

Bevor ich die E_∞-Struktur für die $Q_*^n(R)$ herleite, führe ich den Begriff eines E_∞-monoidalen Funktors ein, um eine Operation einer E_∞-Operade auf den Bildern des Funktors beschreiben zu können. Die E_∞-Operade, die schließlich auf $Q^n_*(R)$ operiert, konstruiert man über eine Operade, die auf der kubischen Konstruktion für Mengen operiert. Der Transfer auf die Q-Konstruktionen wird über linke Kan-Erweiterungen bewerkstelligt.

Die kubische Konstruktion $Q_*(-)$ bildet also kommutative Algebren auf E_∞-Algebren ab. Im Abschnitt 6.6 untersuche ich, was passiert, wenn man die kubische Konstruktion von A_∞- bzw. E_∞-Algebren betrachtet: Eine A_∞-Algebra über einer gradweise freien Operade geht wieder in eine A_∞-Algebra über; zu jeder E_∞-Algebra A gibt es dagegen nur eine quasi-isomorphe E_∞-Algebra B, die unter der kubischen Konstruktion wieder in eine E_∞-Algebra überführt wird.

Als Anwendungsbeispiel für die entwickelten Methoden zeige ich, daß der Funktor C_*, der einer simplizialen abelschen Gruppe den unnormalisierten Kettenkomplex zuordnet, ein E_∞-komonoidaler Funktor ist.

Danksagungen

Ich danke meinen Betreuern Prof. C.-F. Bödigheimer, Prof. V. Franjou und Dr. Pirashvili. Dem Graduiertenkolleg „Algebraische, analytische und geometrische Methoden und ihre Wechselwirkungen in der modernen Mathematik“ danke ich für die finanzielle Unterstützung als Kollegiatin. Herrn Prof. Waldhausen aus Bielefeld danke ich für die Ermöglichung zweier Aufenthalte am dortigen Sonderforschungsbereich. A. Boland, B. Löwe, V. Eisermann, M. Esken und V. Schwingenheuer danke ich für die Hilfe bei der Fertigstellung des Manuskripts.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Notation

Wir werden die höheren kubischen Konstruktionen ausgehend von der Kategorie der Γ-Moduln betrachten. Die Kategorie Γ ist das Skelett der Kategorie der endlichen punktierten Mengen mit grundpunkterhaltenden Abbildungen. Die Objekte von Γ bezeichnen wir mit $[n] := \{0, 1, \ldots, n\}$; dabei ist 0 der Grundpunkt. Die Menge der Morphismen in Γ von $[n]$ nach $[m]$ sei als $\Gamma([n], [m])$ notiert. Spielt die Mächtigkeit der endlichen punktierten Menge keine Rolle, so bezeichnen wir Objekte aus Γ auch mit X_+; dabei ist X eine endliche Menge und $+$ ein hinzugefügter Grundpunkt. Es ist also $[n] = \{1, \ldots, n\}_+$; Γ-Moduln sind nun Funktoren aus der Kategorie Γ in die Kategorie von R-Moduln. Hierbei sei R ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins. Ist S eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $R\{S\}$ den freien R-Modul auf den Elementen von S. Sind S und T Mengen, so benutzen wir $S \subset T$, wenn S eine – nicht unbedingt echte – Teilmenge von T ist.

2.2 Projektive Erzeuger und Tensorprodukte

2.2.1 Darstellbare Funktoren und duale Funktoren

Kategorien von Funktoren aus einer kleinen Kategorie in die Kategorie der R-Moduln, R-Mod, haben die darstellbaren Funktoren als projektive Erzeuger. Zur Festlegung der Notation setzen wir Γ^n als den kovarianten darstellbaren Funktor

$$\Gamma^n[m] := R\{\Gamma([n], [m])\},$$

also als den von der Menge der Morphismen von $[n]$ nach $[m]$ in Γ frei erzeugten R-Modul. Der entsprechende kontravariante darstellbare Funktor Γ_n ist durch

$$\Gamma_n[m] := R\{\Gamma([m], [n])\}$$

definiert.

Definition 2.2.1 *Ist F ein Γ-Modul, so ist der* zu F duale Funktor F^* *definiert als*

$$F^*[n] = Hom_{R-Mod}(F[n], R).$$

Da wir im Folgenden häufig mit reduzierten Funktoren arbeiten möchten, also mit Funktoren, die auf $[0]$ trivial sind, definieren wir einen reduzierten

Satz projektiver Erzeuger, indem wir Γ^1 reduzieren und davon Tensorpotenzen betrachten: Es sei

$$L : \Gamma \to R - \mathrm{Mod}$$

definiert als der Kokern

$$L[n] := \mathrm{coker}(\Gamma^0[n] \to \Gamma^1[n]),$$

d.h. $L[n]$ ist der freie R-Modul auf den Elementen aus $\{1, \dots, n\}$.

2.2.2 Tensorprodukte

Definition 2.2.2 *Sind F, G zwei Γ-Moduln, so ist das* punktweise Tensorprodukt von F und G *definiert als*

$$F \otimes G : \Gamma \longrightarrow R - Mod$$

$$(F \otimes G)[n] := F[n] \otimes G[n].$$

Für den Funktor L betrachten wir die Tensorpotenzen

$$L^{\otimes m}[n] = \overbrace{(L \otimes \cdots \otimes L)}^{m}[n],$$

und dies ergibt den freien Modul erzeugt von allen m-Tupeln von Elementen aus $\{1, \dots, n\}$. Da sich der darstellbare Funktor Γ^1 in $\Gamma^1 \cong \Gamma^0 \oplus L$ aufspaltet, sieht man, daß die $\{L^{\otimes m}\}_{m \geq 0}$ projektive Erzeuger für die Kategorie der Γ-Moduln sind. Dabei sei $L^{\otimes 0} := \Gamma^0$.

Wichtige Beispiele für Γ-Moduln sind Zusammensetzungen von L mit Endofunktoren von R-Moduln wie zum Beispiel der n-ten äußeren Potenz Λ^n oder der n-ten symmetrischen Potenz Sym^n.

Definition 2.2.3 *Neben dem punktweisen Tensorprodukt gibt es ein* Tensorprodukt *zwischen einem kontravarianten Γ-Modul T und einem kovarianten Γ-Modul F, welches definiert ist als*

$$T \otimes_\Gamma F \quad = \Big(\bigoplus\nolimits_{[n] \in Ob(\Gamma)} T[n] \otimes G[n]\Big) / \sim \quad \in R - Mod.$$

Dabei werden durch $\sim$ Elemente identifiziert, die sich durch Morphismen ineinander transformieren lassen, d.h. für alle $f : [n] \to [m]$ aus Γ und für alle $x \in T[m]$ und $y \in F[n]$ ist $f^*(x) \otimes y \sim x \otimes f_*(y)$.

Bemerkung 2.2.4 *Dieses Tensorprodukt von Funktoren hat eine Adjunktionseigenschaft (wie man sie zum Beispiel in [Sch, Band II, ab Seite 45] findet), und daher ist das Tensorprodukt mit darstellbaren Funktoren einfach zu beschreiben:*

$$\begin{aligned} \Gamma_n \otimes_\Gamma F &\cong F[n], \\ T \otimes_\Gamma \Gamma^n &\cong T[n]. \end{aligned}$$

2.3 Fortsetzung auf simpliziale Mengen

Es sei F ein Γ-Modul. Ein solches F läßt sich über Kolimites zu einem Funktor von beliebigen punktierten Mengen, Sets_*, in die Kategorie der R-Moduln ausdehnen

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Sets}_* &\longrightarrow R - \mathrm{Mod} \\ F(S_+) &:= \operatorname{colim}_{\substack{X_+ \subset S_+ \\ |X_+| < \infty}} F(X_+) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diesen Funktor weiterhin mit F. Weiterhin erhält man einen Funktor von punktierten simplizialen Mengen sSets_* in die Kategorie der simplizialen R-Moduln, indem man F gradweise auswertet: Ist $X_\bullet$ eine punktierte simpliziale Menge, so definiert $F(X)_n = F(X_n)$ einen simplizialen Modul.

2.3.1 Stabile Homotopie

Definition 2.3.1 *Zu einem Γ-Modul F betrachtet man seine Fortsetzung auf simpliziale punktierte Mengen. Die* stabile Homotopie $\pi_*^{st}(F)$ von *F ist definiert als die Stabilisierung der Homotopiegruppen von F ausgewertet auf simplizialen Modellen von Sphären:*

$$\pi_k^{st} F = \ colim_n \pi_{k+n} F(\mathbb{S}^n).$$

Dieser Kolimes stabilisiert sich für $n > k$ und ist unabhängig von den gewählten Modellen der Sphären.

2.4 Mischeffekte

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt und mit endlichen Summen. Die X_+^i seien Objekte aus $\mathcal{C}$; wir bezeichnen mit $X_+^1 \vee X_+^2$ die Summe von X_+^1 und

X_+^2 in $\mathcal{C}$. Für eine Teilmenge $\{i_1, \ldots i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir Projektionsabbildungen

$$\pi_{(X_+^{i_1} \vee \ldots \vee X_+^{i_k})} : X_+^1 \vee \ldots \vee X_+^n \longrightarrow X_+^1 \vee \ldots \vee X_+^n,$$

welche die Komponenten $X_+^{i_1}, \ldots, X_+^{i_k}$ identisch abbilden und alle anderen Komponenten auf den Grundpunkt $+$ projizieren. Es sei G ein Funktor von $\mathcal{C}$ in eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$.

Definition 2.4.1 *Der n-te* Mischeffekt $cr_n G$ des Funktors G *ist ein Funktor*

$$cr_n G : \mathcal{C}^n \to \mathcal{A},$$

der auf den Objekten $X_+^1, \ldots, X_+^n$ definiert ist als das Bild

$$cr_n G(X_+^1, \ldots, X_+^n) := Bild \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} G(\pi_{(X_+^{i_1} \vee \ldots \vee X_+^{i_k})}) \right).$$

Bemerkung 2.4.2 *Ist G ein reduzierter Funktor, so gilt für die Mischeffekte*

$$\begin{aligned} G(X_+) &\cong cr_1 G(X_+), \\ G(X_+^1 \vee X_+^2) &\cong cr_2 G(X_+^1, X_+^2) \oplus G(X_+^1) \oplus G(X_+^2), \\ cr_2 G(X_+^1, X_+^2 \vee X_+^3) &\cong cr_2 G(X_+^1, X_+^2) \oplus cr_2 G(X_+^1, X_+^3) \\ &\quad \oplus cr_3 G(X_+^1, X_+^2, X_+^3). \end{aligned}$$

Der n-te Mischeffekt verhält sich dann auf Objekten wie folgt:

$$\begin{aligned} &cr_{n-1} G(X_+^1, \ldots, X_+^{n-1} \vee X_+^n) \\ &\quad \cong cr_{n-1} G(X_+^1, \ldots, X_+^{n-2}, X_+^{n-1}) \oplus cr_{n-1} G(X_+^1, \ldots, X_+^{n-2}, X_+^n) \\ &\quad\quad \oplus cr_n G(X_+^1, \ldots, X_+^n). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4.3 *Wertet man einen Funktor G auf einer Summe aus, so kann man diesen Wert $G(X_+^1 \vee \ldots \vee X_+^n)$ auch als Summe von Mischeffekten ausdrücken:*

$$G(X_+^1 \vee \ldots \vee X_+^n) = \bigoplus_{\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}} cr_k G(X_+^{i_1}, \ldots, X_+^{i_k}).$$

Definition 2.4.4 *Ein Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ heißt* vom Grad n, *falls der $(n+1)$-ste Mischeffekt cr_{n+1} verschwindet.*

Der $(n+1)$-ste Mischeffekt ist also ein Maß dafür, inwiefern ein Funktor nicht vom Grad n ist. Für Endofunktoren abelscher Gruppen wurde der Begriff Mischeffekt („cross-effect“) von Eilenberg und MacLane in [E-M, Abschnitte 8 und 9] eingeführt.

In der Kategorie Γ ist die Summe zweier Objekte X_+ und Y_+ das Bouquet $X_+ \vee Y_+$ der beiden Mengen; das Nullobjekt ist der Grundpunkt $+$.

Bemerkung 2.4.5 *Der n-te Mischeffekt eines Γ-Moduls F ausgewertet auf den Objekten $[1] \in \Gamma$ ist*

$$cr_n F([1], \ldots, [1]) = \bigcap_{i=1}^{n} ker(F(r_i) : F[n] \to F[n-1])$$

$$mit\ r_i : [n] \to [n-1], \quad r_i(j) := \begin{cases} j, & j < i \\ 0, & j = i \\ j-1, & j > i. \end{cases}$$

Für einen kontravarianten Funktor $T : \Gamma^{op} \to R$-Mod ist der entsprechende Mischeffekt durch den dualen Ausdruck

$$cr_n T([1], \ldots, [1]) = coker\left(\bigoplus_{i=1}^{n} T(r_i) : T[n-1] \longrightarrow T[n]\right)$$

gegeben.

Im Folgenden listen wir einige wichtige Beispiele für Γ-Moduln auf:

1. Lineare Funktoren F von Γ in die Kategorie der abelschen Gruppen führen zu Eilenberg-MacLane-Räumen: Wertet man ein solches F auf einem simplizialen Modell einer n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ aus, so ist das Ergebnis ein $K(F[1], n)$.

2. Typische Γ-Moduln vom Grad n sind der Funktor $L^{\otimes n}$ und die Kompositionen $\Lambda^n \circ L$ und $\mathrm{Sym}^n \circ L$.

3. Mit $\mathcal{B}_\ell : \Gamma \to R$-Mod bezeichnen wir den Funktor, der eine endliche punktierte Menge X_+ auf den freien R-Modul abbildet, der von allen nichtleeren Teilmengen von X mit Kardinalität kleiner oder gleich ℓ erzeugt wird. Ein Morphismus f in Γ nimmt von einem Erzeuger S das Bild $f(S)$, falls der Grundpunkt nicht Element von $f(S)$ ist; ansonsten ist $f_*(S)$ Null. Die Inklusion von Teilmengen der Mächtigkeit $\leq \ell - 1$ in solche mit Mächtigkeit $\leq \ell$ induziert eine natürliche Transformation von $\mathcal{B}_{\ell-1}$ nach $\mathcal{B}_\ell$; den Quotientenfunktor $\mathcal{B}_\ell/\mathcal{B}_{\ell-1}$ kürzen wir mit ψ_ℓ ab.

4. Polynomiale Endofunktoren endlich-dimensionaler Vektorräume über einem Körper der Charakteristik Null sind von I.G. Macdonald in [Md, Seite 74 bis 84] klassifiziert worden: Ein solcher Funktor F zerfällt in homogene Funktoren $F = \bigoplus F_n$ und homogene Funktoren von Grad n sind durch eine Darstellung der symmetrischen Gruppe auf n Elementen Σ_n bestimmt. Die Kategorie der homogenen Funktoren vom Grad n ist sogar äquivalent zur Kategorie der endlich-dimensionalen Σ_n-Darstellungen. Insbesondere sind also polynomiale Funktoren der Form $F \circ L$ mit einem F wie oben in Charakteristik Null klassifiziert.

2.5 Dold-Kan Korrespondenz

Sei Ω das Skelett der Kategorie der nichtleeren endlichen Mengen mit Surjektionen als Morphismen. Die Objekte von Ω bezeichnen wir mit $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$. Pirashvili zeigt in [P2], daß es eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Funktoren von Γ in die Kategorie der R-Moduln und der Funktorkategorie $R - \mathrm{Mod}^\Omega$ gibt, die analog zur Dold-Kan-Korrespondenz zwischen simplizialen Moduln und Kettenkomplexen konstruiert ist.

Für jeden Γ-Modul $F : \Gamma \to R$-Mod gibt es einen entsprechenden Funktor $cr(F) : \Omega \to R$-Mod, der definiert ist als

$$cr(T)(\underline{n}) = cr_n T([1], \ldots, [1]).$$

Im kontravarianten Fall gilt diese Äquivalenz immer noch.

Wir betrachten die Funktoren aus dem dritten Beispiel. Unter der Dold-Kan Korrespondenz geht der Funktor ψ_n in den Ω-Modul $cr(\psi_n)$ über, der nur auf dem Objekt $\underline{n}$ den nichttrivialen Wert $R\{\{1, \ldots, n\}\} \cong R$ annimmt. Für Objekte $i < n$ ist der i-te Mischeffekt $cr_i\psi_n$ als Durchschnitt der Kerne der Abbildungen $\psi_n(r_j) : \psi[i] \to \psi[i-1]$ trivial, weil $\psi_n[i] = 0$ für $i < n$. Ist $i > n$ und $S \subset \{1, \dots, i\}$ eine Teilmenge mit Mächtigkeit n, dann gibt es immer ein j, so daß $\psi_n(r_j)(S)$ nichttrivial ist, weil ein j aus $\{1, \dots, i\}$ nicht in S ist.

Entsprechend sind die Mischeffekte $cr_m\mathcal{B}_n$ von $\mathcal{B}_n$ trivial auf Objekten $\underline{m} \in \Omega$ mit $m > n$. Ansonsten ist $cr(\mathcal{B}_n)(\underline{i})$ isomorph zum freien R-Modul erzeugt von der Menge $\{1, \dots, i\}$; die i-ten Mischeffekte sind also eindimensional für $1 \leq i \leq n$.

2.5.1 Verträglichkeit mit dem Tensorprodukt

Das folgende Ergebnis garantiert, daß man Tor-Gruppen von Γ-Moduln ebensogut in der Kategorie der Ω-Moduln berechnen kann.

Proposition 2.5.1 *Für einen Γ^{op}-Modul T und einen Γ-Modul F gibt es einen Isomorphismus*

$$Tor_*^{\Gamma}(T, F) \cong Tor_*^{\Omega}(cr(T), cr(F)).$$

Beweis
Die n-te Tensorpotenz der Auflösung

$$\Gamma^0([n]) \longrightarrow \Gamma^1([n]) \longrightarrow L([n]) \to 0$$

ist eine Auflösung von $L^{\otimes n}$. In kleinen Graden erhalten wir

$$\cdots \to n(\Gamma^1)^{\otimes(n-1)} \to (\Gamma^1)^{\otimes n} \to L^{\otimes n} \to 0$$

Dabei ist $n(\Gamma^1)^{\otimes(n-1)}$ die Abkürzung für $\bigoplus_{i=1}^n (\Gamma^1)^{\otimes(n-1)}$.

Lemma 2.5.2

$$cr_n(L^{\otimes m}) \cong R\{\Omega(\underline{m}, \underline{n})\}$$

Beweis
Der Wert der m-ten Tensorpotenz des Funktors L auf $[n]$ ist

$$(L^{\otimes m})([n]) \cong \overbrace{L([n]) \otimes \cdots \otimes L([n])}^{m},$$

und dies ist der freie R-Modul erzeugt von allen m-Tupeln $(x_1, \dots x_m)$ mit $x_i \in \{1, \dots, n\}$. Solch ein m-Tupel beschreibt eine Abbildung von $\underline{m}$ nach $\underline{n}$, aber nicht unbedingt einen Morphismus in Ω. Die Elemente im Kern einer

Abbildung r_i sind genau solche m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$, für die es einen Index j mit $r_i(x_j) = 0$ gibt. Das heißt aber, daß $x_j = i$ ist. Der Durchschnitt aller dieser Kerne $\bigcap_{i=1}^n \ker((r_i)_*)$ ist dann der freie R-Modul auf den m-Tupeln $(x_1, \ldots, x_m) \in ([n]\backslash 0)^m$, die eine Permutation des Tupels $(1, \ldots, n)$ darstellen. Dieser Schnitt entspricht also den surjektiven Abbildungen von $\underline{m}$ nach $\underline{n}$. $\square$

Nun können wir den Beweis der Behauptung fortsetzen:
Es genügt, den Isomorphismus

$$F \otimes_\Gamma T \cong cr(F) \otimes_\Omega cr(T)$$

für die projektiven Erzeuger $T = L^{\otimes n}$ zu zeigen. Aber für diese Funktoren wissen wir nach obigem Lemma, daß

$$cr(F) \otimes_\Omega cr(L^{\otimes n}) \cong cr(F) \otimes_\Omega \Omega^n \cong cr(F)(\underline{n}).$$

Andererseits ist $F \otimes_\Gamma L^{\otimes n}$ über die Auflösung von $L^{\otimes n}$ isomorph zu

$$\operatorname{coker}(F \otimes_\Gamma n\Gamma^{n-1} \to F \otimes_\Gamma \Gamma^n),$$

und dies ist gleich dem Kokern der Abbildung

$$nF([n-1]) \to F([n]).$$

Die Abbildung hierbei ist die von $r_1^* + \cdots + r_n^*$ induzierte. Daher ist dieser Kokern ebenfalls gleich $cr(F)(\underline{n})$. $\square$

Kapitel 3

Taylorapproximation für Γ-Moduln

3.1 Taylorturm für Γ-Moduln

Für jeden Γ-Modul $F : \Gamma \to R$-Mod gibt es einen Approximationsturm

$$\cdots \to P_n F \to P_{n-1} F \to \cdots \to P_1 F \to P_0 F.$$

Dabei sind die Funktoren $P_n F : \Gamma \to Ch(R)$ zwar nicht strikt vom Grad n aber „homologisch vom Grad n“.

Definition 3.1.1 *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt und endlichen Summen, und sei $F : \mathcal{C} \to Ch(R)$ ein Funktor von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Kettenkomplexe von R-Moduln. Dann heißt F* homologisch vom Grad n, *falls der $(n+1)$ste Mischeffekt $cr_{n+1}(F)$ azyklisch ist.*

Bemerkung 3.1.2 *Ist $F : \Gamma \to Ch(R)$ homologisch vom Grad n, so ist $H_m F : \Gamma \to R$-Mod ein Funktor vom Grad n; insbesondere ist die Homologie von F trivial, falls sie auf den Werten $[\ell]$ für alle $\ell \leq n$ verschwindet.*

3.1.1 Konstruktion der Approximationsschritte

Im Folgenden seien alle Funktoren reduziert. Die nullte Taylorapproximation $P_0 F = F[0]$ verschwindet in diesem Fall. Um die Approximationsschritte $P_n F$ zu beschreiben, betrachtet man zunächst eine unnormalisierte Fassung $P'_n F$, aus der $P_n F$ durch Quotientenbildung hervorgeht.

Der unnormalisierte Approximationsfunktor vom homologischen Grad n ist der Funktor $P'_n F$ von Γ in die Kategorie der Kettenkomplexe, dessen k-dimensionale Komponente ausgewertet auf einem Objekt $X_+ \in \Gamma$ wie folgt aussieht:

$$P'_n F(X_+)_k := F\left(\bigvee_{[n]^k} X_+\right).$$

Für alle Approximationsstufen P_n sei der Wert in Dimension $k = 0$ gleich $(P'_n F(X_+))_0 := F(X_+)$. Für die Menge $X_+ = [1]$ wird F in der n-ten Approximationsstufe also auf den punktierten Würfeln $([n]^k)_+$ ausgewertet.
Der Randoperator

$$\delta : P'_n F(X_+)_k = F\left(\bigvee_{[n]^k} X_+\right) \longrightarrow F\left(\bigvee_{[n]^{k-1}} X_+\right) = P'_n F(X_+)_{k-1}$$

wird durch Abbildungen auf Mengenniveau

$$\bigvee_{[n]^k} X_+ \longrightarrow \bigvee_{[n]^{k-1}} X_+$$

induziert.

Es sei π_1^j die Projektion

$$\pi_1^j : \bigvee_{[n_1]\times\ldots\times[n_j]\times\ldots\times[n_k]} X_+ \longrightarrow \bigvee_{[n_1]\times\ldots\times[n_j-1]\times\ldots\times[n_k]} X_+,$$

welche alle Komponenten X_+ mit den Markierungen

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{j-1}, n_j, \epsilon_{j+1}, \ldots, \epsilon_k)$$

auf den Grundpunkt abbildet, und es sei π_2^j die Abbildung, die alles, was mit $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{j-1}, n_j - 1, \epsilon_{j+1}, \ldots, \epsilon_k)$ markiert ist, auf den Grundpunkt $+$ projiziert. Alle anderen Komponenten werden identisch unter π_1^j und π_2^j abgebildet. Schließlich sei $\pi_>^j$ diejenige Abbildung, welche die Komponenten, die mit n_j und $n_j - 1$ an der j-ten Stelle markiert sind, aufeinander abbildet und auf allen anderen Komponenten die Identität ist. Der j-te Anteil des Randoperators, δ_j, besteht nun aus der Zusammensetzung

$$\delta_j := F(\pi_>^j) - F(\pi_1^j) - F(\pi_2^j).$$

Von dieser Abbildung bildet man die n-fachen Iterationen

$$\delta_j^n : F\left(\bigvee_{[n]^k} X_+\right) \longrightarrow F\left(\bigvee_{[n]\times\ldots\times[0]\times\ldots\times[n]} X_+\right) \cong F\left(\bigvee_{[n]^{k-1}} X_+\right).$$

Der volle Randoperator

$$\delta : F\left(\bigvee_{[n]^k} X_+\right) \longrightarrow F\left(\bigvee_{[n]^{k-1}} X_+\right)$$

ist die alternierende Summe der n-ten Potenzen der δ_j

$$\delta := \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \delta_j^n.$$

In kleinen Graden sieht der Randoperator wie folgt aus: Die Abbildung δ_1 ist durch die beiden Projektionen

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
X_+ \arrow[rrdddd] & & \\
\vee & & \\
X_+ \arrow[r] & X_+ & \\
\vee & \vee & \\
X_+ \arrow[r] & X_+ \ni & +
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
X_+ \arrow[rdd] & & \\
\vee & & \\
X_+ \arrow[rrdd] & X_+ & \\
\vee & \vee & \\
X_+ \arrow[r] & X_+ \ni & +
\end{tikzcd}
$$

und die Abbildung $\pi_>$

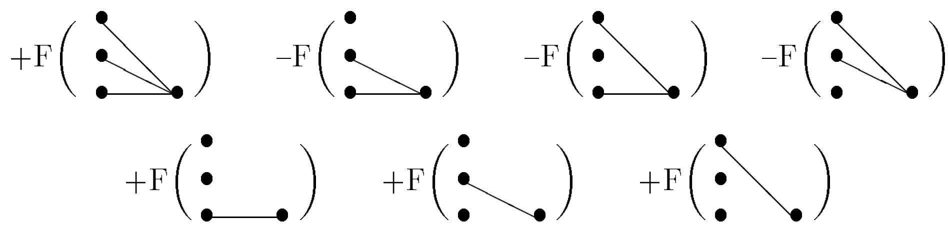
$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
X_+ \arrow[rdd] & \\
\vee & \\
X_+ \arrow[r] & X_+ \\
\vee & \vee \\
X_+ \arrow[r] & X_+
\end{tikzcd}
$$

induziert.

Die Iteration von δ_1 projiziert jeweils eine Komponente aus $X_+ \vee X_+$ auf den Grundpunkt bzw. überlagert beide Komponenten:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
X_+ \arrow[rrdd] & & \\
\vee & & \\
X_+ \arrow[r] & X_+ \ni & +
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
X_+ \arrow[rdd] & & \\
\vee & & \\
X_+ \arrow[rr, bend right] & X_+ \ni & +
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
X_+ \arrow[rdd] & \\
& \\
X_+ \arrow[r] & X_+
\end{tikzcd}
$$

Die Abbildungen der Form $\pi_1 \circ (-)$ stimmen alle überein. Aufgrund der Vorzeichen bleibt von diesen drei Termen nur einer übrig, und der gesamte Rand besteht nur aus sieben Summanden. Diese durchlaufen alle möglichen Projektionen und Überlappungen:



Einen Grad höher besteht der Rand aus zwei verschiedenen Termen δ_1 und δ_2. Stellt man sich die Elemente aus $\bigvee_{[2]^2} X_+$ in einem Quadrat angeordnet vor

$$\begin{array}{ccccccc} & X_+ & \vee & X_+ & \vee & X_+ \\ \vee & X_+ & \vee & X_+ & \vee & X_+ \\ \vee & X_+ & \vee & X_+ & \vee & X_+, \end{array}$$

so kann man sich δ_1 als den horizontalen Anteil des Randoperators und δ_2 als den vertikalen Randanteil vorstellen. Die horizontale Randabbildung δ_1 besteht in der ersten Komponente π_1^1 aus der Projektion auf die ersten beiden Zeilen. Die zweite Komponente π_2^1 projiziert die zweite Zeile auf den Grundpunkt. Dazu kommt noch die Abbildung $\pi_>^1$, welche die nullte Zeile identisch abbildet und die Zeilen eins und zwei übereinanderschiebt:

$$\begin{tikzcd}
X_+ \vee X_+ \vee X_+ \arrow[dr] & \\
\vee X_+ \vee X_+ \vee X_+ \arrow[r] & X_+ \vee X_+ \vee X_+ \\
\vee X_+ \vee X_+ \vee X_+ \arrow[r] & \vee X_+ \vee X_+ \vee X_+
\end{tikzcd}$$

Im vertikalen Teil δ_2 ist π_1^2 die Projektion auf die ersten beiden Spalten, gefolgt von der Projektion π_2^2 der ersten Spalte auf den Grundpunkt und der Überlagerung $\pi_>^2$ der Spalten eins und zwei:

$$\begin{tikzcd}
X_+ & \vee X_+ & \vee X_+ \\
\vee X_+ & \vee X_+ & \vee X_+ \\
\vee X_+ \arrow[dd] & \vee X_+ \arrow[dd] & \vee X_+ \arrow[ddl] \\
 & & \\
X_+ & \vee X_+ & \\
\vee X_+ & \vee X_+ & \\
\vee X_+ & \vee X_+ &
\end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, daß δ ein Randoperator ist, benötigt man die folgenden beiden Hilfsaussagen. Die Beweise, die ich hier gebe, sind modifizierte Versionen der Beweise in [J-McC1].

Lemma 3.1.3 *Für die Seitenabbildungen δ_j auf der n-ten Taylorapproximation und für die Iterationen δ_j^i gelten die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{array}{rcll} \delta_i^n \circ \delta_j & = & \delta_{j-1} \circ \delta_i^n & \textit{für } i < j \\ \delta_i^\ell \circ \delta_j & = & \delta_j \circ \delta_i^\ell & \textit{für } \ell < n. \end{array}$$

Beweis
Für $n = 1$ ist die Behauptung klar, weil die Seitenabbildungen hierbei semisimpliziale Identitäten erfüllen. Sei also $n > 1$. Wir betrachten zunächst die Abbildungen $\delta_j \circ \delta_i$ und $\delta_i \circ \delta_j$ für $i \leq j$. In diesem Fall sind beide Abbildungen gleich, weil für $i \neq j$ die Projektionsabbildungen miteinander vertauschen. Induktiv folgt nun, daß $\delta_j \circ (\delta_i)^\ell = (\delta_i)^\ell \circ \delta_j$, solange $\ell < n$ ist. Für $\ell = n$ gilt aber dieselbe Formel wie für $n = 1$ und die Behauptung folgt für $i < j$ aus

$$\delta_{j-1} \circ (\delta_i)^n = \delta_{j-1} \circ \delta_i \circ (\delta_i)^{n-1} = \delta_i \circ \delta_j \circ (\delta_i)^{n-1},$$

und dies ist gleich $\delta_i^n \circ \delta_j$. □

Lemma 3.1.4 *Die Abbildungen $\delta : (P'_n F)_k \to (P'_n F)_{k-1}$ sind Randoperatoren.*

Beweis
Die Iteration $\delta \circ \delta$ ergibt die Summe

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \delta_i^n \delta_j^n.$$

Diese Summe teilt sich in einen Teil mit $i < j$ und einen anderen mit $j \leq i$ auf. Nach Lemma 3.1.3 addieren sich diese Teile zu null.

□

Aus der unnormalisierten Approximation $P'_n(F)_k$ entfernt man noch Anteile, die in Dimension k auf gewissen Hyperebenen in $[n]^k$ keine Information tragen, oder die nur auf der Diagonalen nichttrivial sind. Erst die normalisierte Fassung der Approximationsschritte $P_n F$ hat die gewünschten Eigenschaften. Aus dem Bild des Funktors teilt man Werte auf Teilmengen heraus, zum einen auf „Schichten“ und zum anderen auf „Diagonalelementen“. Die zugehörigen Teilmengen von $[n]^k$ bezeichnen wir mit denselben Namen. Die *Schichten* $S_j^i \subset [n]^k, k \geq 1$ sind Mengen

$$S_j^i := \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) \mid \epsilon_i \neq j\}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

wohingegen die *Diagonalen* $D_i \subset [n]^k, k \geq 2$ von der Gestalt

$$D_i := \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) \mid \epsilon_i = \epsilon_{i+1}\}$$

sind. Schichten sind also isomorph zu $[n]^{k-1} \times [n-1]$, während Diagonalen aus einer Dimension tiefer stammen und isomorph zu $[n]^{k-1}$ sind.

Definition 3.1.5 *Die* n*-te* Taylorapproximation P_nF des Γ-Moduls F *im Grad* k *ist der Kokern*

$$(P_nF(X_+))_k := coker\left(\bigoplus_{T\in\{\{S_j^i\},\{D_i\}\}} F\left(\bigvee_{t\in T} X_+\right) \longrightarrow F\left(\bigvee_{s\in[n]^k} X_+\right)\right)$$

Bemerkung 3.1.6 *Man sieht leicht, daß der Randoperator* δ *auf der Normalisierung immer noch wohldefiniert ist.*

Definition 3.1.7 *Ist* $F : \Gamma \longrightarrow Ch(R)$ *ein* Γ*-Kettenkomplex, so sei die* n*-te Taylorapproximation* P_nF *von* F *über den Totalkomplex von* $(P_nF)_{p,q}$ *definiert: Ein solches* F *ist ein Kettenkomplex von* Γ*-Moduln* F_p*. Aus den Taylorapproximationen* P_nF_p *für diese* $F_p : \Gamma \longrightarrow R$*-Mod bildet man* $P_nF : \Gamma \to Ch(R)$ *über den Totalkomplex*

$$(P_nF)_k := \bigoplus_{p+q=k} (P_nF_p)_q$$

3.1.2 Die kubischen Konstruktionen

Es sei A eine abelsche Gruppe. Wir betrachten den Funktor $F = \mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$, der eine endliche punktierte Menge $[n]$ auf die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Elementen aus A^n abbildet. Ein Morphismus $f : [n] \to [m]$ bildet ein n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ auf das m-Tupel $(b_1, \dots, b_m)$ ab, wobei die einzelnen Einträge von der Form sind $b_i = \sum_{f(j)=i} a_j$; ist das Urbild von i unter f leer, wird eine Null eingefügt.

Die Eilenberg-MacLane Konstruktion $Q(A)$ ist die erste Taylorapproximation von $\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$ ausgewertet auf dem Objekt $[1] \in \Gamma$, also

$$Q_*(A) := P_1(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})[1],$$

d.h. $Q_*(A)$ ist ein Kettenkomplex abelscher Gruppen, der im Grad m ein Quotient von

$$\mathbb{Z}\left\{\overline{A}\{\bigvee_{[1]^m}[1]\}\right\} \cong \mathbb{Z}\{A\{[1]^m\}\} \cong \mathbb{Z}\{A^{2^m}\}$$

ist. Im Grad null hat dieser Komplex die nichttrivialen Erzeuger (a) mit $0 \neq a \in A$; im Grad eins treten Erzeuger wie (a, b) mit $a, b \neq 0$ auf. Schichtelemente kann man sich für diesen Funktor so vorstellen, daß sie über die Inklusionsabbildungen $[1]^{k-1} \hookrightarrow [1]^k$ aus der Dimension $k-1$ stammen. In kleinen Graden sieht der Randoperator δ wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \delta(a) &= 0, \\ \delta(a,b) &= (a+b) - (a) - (b), \\ \delta\tbinom{a,b}{c,d} &= -(a,b) - (c,d) + (a+c, b+d) \\ &\quad +(a,c) + (b,d) - (a+b, c+d). \end{aligned}$$

Diese Definition der kubischen Konstruktion stimmt mit der von Eilenberg und MacLane in [E-M2] gegebenen überein. Die höheren Taylorapproximationen von $F = \mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$ bezeichnen wir mit

$$Q_*^n(A) := P_n(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})[1].$$

Diesen Kettenkomplex nennen wir die *n-te kubische Konstruktion von A* (oder auch kürzer die n-te Q-Konstruktion). Die n-te Approximation an der Stelle [1] besteht aus den Erzeugern $(a), a \in A$ im Grad 0. Im Grad 1 sind die Erzeuger die $(n+1)$-Tupel $(a_0, \ldots, a_n)$, bei denen kein Eintrag null ist. Im Grad 2 dürfen dann Nullen auftreten: Für $n = 2$ ist zum Beispiel das Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht trivial.

Bemerkung 3.1.8 *Dieses Beispiel zeigt, daß die Taylorapproximation für Γ-Moduln die Approximationstheorie von Endofunktoren von Modulkategorien, wie sie zum Beispiel in [J-McC1] durchgeführt wird, umfaßt, indem man Funktoren wie L bzw. $\overline{A}\{-\}$ vor einen solchen Endofunktor schaltet.*

3.1.3 Die Abbildungen im Taylorturm

Was uns zur Konstruktion der Taylorapproximation noch fehlt, sind Abbildungen $F \to P_nF$ für alle n und Transformationen $P_nF \to P_{n-1}F$, die den

Funktor F mit seinem Approximationsturm verbinden und welche die einzelnen Approximationsschritte miteinander verknüpfen und somit eine Abbildung

$$F \longrightarrow \lim_{\longleftarrow} P_n F$$

ermöglichen. Wir werden in dieser Arbeit Konvergenzfragen nicht behandeln. Entsprechende Ergebnisse kann man in [J-McC3, Abschnitt 4] finden.

Die Abbildung $F \to P_n F$ ist leicht zu definieren, weil $(P_n F([\ell]))_0$ für reduzierte Funktoren als $F([\ell])$ gesetzt ist. Im unreduzierten Fall ist $(P_n F([\ell]))_0$ als $F([\ell])/F[0]$ zu definieren.

Proposition 3.1.9 *Die Abbildung $F([\ell]) \longrightarrow (P_n F([\ell]))_0$ induziert eine natürliche Transformation*

$$p_n : F \to P_n F$$

$\square$

Bemerkung 3.1.10 *Es ist leicht zu sehen, daß diese Abbildung für reduzierte Funktoren F vom homologischen Grad n eine schwache Äquivalenz induziert, weil sich der Approximationsschritt $(P_n F)_\ell$ als direkte Summe von Mischeffekten schreiben läßt:*

$$(P_n F)_\ell \cong \bigoplus_{S \subset [n]^\ell} cr_{|S|} F.$$

Die Indexmengen S durchlaufen dabei alle Teilmengen von $[n]^\ell$, die weder zu den Schichten noch zu den Diagonalelementen gehören. Dies folgt aus der Tatsache, daß sich der Wert von F auf einer Summe immer auflösen läßt in eine Summe von Mischeffekten (vergleiche Bemerkung 2.4.3). Eine Teilmenge $S \subset [n]^\ell$ mit $|S| \leq n$ und $\ell \geq 1$ ist immer degeneriert. Daher ist $P_n F$ in jedem positiven Grad eine Summe von Mischeffekten der Ordnung $\geq n+1$. Die Inklusion von F in $P_n F_0$ ist daher eine schwache Äquivalenz.

Die verschiedenen Schichten des Taylorturms verbindet man mit Hilfe der Abbildungen, die schon für die Definition des Randoperators benutzt wurden:

Proposition 3.1.11 *Es gibt natürliche Transformationen*

$$q_n : P_n F \to P_{n-1} F,$$

so daß die Dreiecksdiagramme

$$\begin{tikzcd} & P_n F \arrow[d, "q_n"] \\ F \arrow[ur, "p_n"] \arrow[r, "p_{n-1}"'] & P_{n-1} F \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Beweis
Die Abbildung q_n kann man für Kettendimension 0 einfach als Identität setzen, weil beide Ausdrücke $(P_n F(X_+))_0$ und $(P_{n-1} F(X_+))_0$ gleich sind. Sei die Dimension k nun größer als 0. Die Abbildung

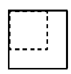
$$(q_n)_k : (P_n F)_k \to (P_{n-1} F)_k$$

sei die folgende Komposition:

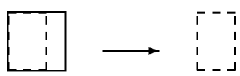
$$(q_n)_k = \delta_1 \circ \cdots \circ \delta_k$$

Wir müssen noch zeigen, daß dies wirklich Kettenabbildungen definiert. Mit den Aussagen aus Lemma 3.1.3 folgt die Behauptung aber sofort. $\square$

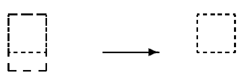
In unserem Beispiel $n = 2$ sollte man sich $\bigvee_{[1]^2} X_+$ eingebettet als nordwestliches Unterquadrat in $\bigvee_{[2]^2} X_+$ vorstellen.



Zuerst wird dieses Quadrat mittels der Projektions- und Überlappungsabbildungen aus δ_2 auf das Rechteck



abgebildet und wird von δ_1 in der nächsten Stufe endgültig auf das kleinere Quadrat projiziert.



Definition 3.1.12 *Wir bezeichnen die* Homotopiefaser *der Abbildung* $q_n : P_nF \longrightarrow P_{n-1}F$ *mit* D_nF. *Es ist also*

$$(D_nF)_k := cone_{k+1}(P_nF \xrightarrow{q_n} P_{n-1}F) = P_nF_k \oplus P_{n-1}F_{k+1}$$

$$\begin{array}{ccc} P_nF & \longleftarrow & D_nF \\ \downarrow{\scriptstyle q_n} & & \\ P_{n-1}F & & \end{array}$$

3.1.4 Eigenschaften der Approximationsschritte

Dieser Abschnitt beinhaltet eine Auflistung einiger Eigenschaften der Approximationsschritte. Diese Eigenschaften folgen direkt aus der Kotripelbeschreibung des Taylorturms von Johnson und McCarthy [J-McC3].

Proposition 3.1.13 *[J-McC3, 2.8] Der n-te Approximationsschritt* P_nF *eines* Γ*-Moduls ist homologisch vom Grad* n*. Die natürliche Abbildung* $F \to P_nF$ *induziert eine schwache Äquivalenz* $P_nF \to P_nP_nF$*. Ein* Γ*-Kettenkomplex* F *ist genau dann homologisch vom Grad* n*, wenn die Abbildung* $F \to P_nF$ *eine schwache Äquivalenz ist. Die Transformation* $P_n : R - Mod^\Gamma \to Ch(R)^\Gamma$ *ist ein exakter Funktor. Die Approximation* P_nF *ist universell unter allen Funktoren vom homologischen Grad* n*: Ist* G *homologisch vom Grad* n *und ist* $F \to G$ *ein Morphismus, so gibt es in der Homotopiekategorie einen eindeutigen Morphismus* $P_nF \to G$.

3.1.5 Operation der symmetrischen Gruppen auf P_nF

Wie wir im Folgenden zeigen werden, trägt der Taylorturm eine Operation von symmetrischen Gruppen; und zwar operiert die Σ_{n+1} auf dem n-ten Approximationsschritt P_n. Für diese kanonisch definierte Operation haben wir bisher noch keine geeignete Interpretation oder Anwendung gefunden. Wir hoffen, dieses Phänomen zu einem späteren Zeitpunkt aufklären zu können.

Die Operation der symmetrischen Gruppe auf $n+1$ Elementen Σ_{n+1} auf der Menge $[n] = \{0, \ldots, n\}$ induziert eine Σ_{n+1}-Operation auf dem n-ten Approximationsschritt im Taylorturm P_nF für jeden Γ-Modul F. Sei $\sigma \in \Sigma_{n+1}$; dann sei für $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell) \in [n]^\ell$ der Wert $\sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell)$ definiert als $(\sigma(\epsilon_1), \ldots, \sigma(\epsilon_\ell))$. Diese Abbildung setzt sich zu einer Permutation der Komponenten in einem $[n]^\ell$-fachen Bouquet fort

$$\sigma : \bigvee_{[n]^\ell} X_+ \longrightarrow \bigvee_{[n]^\ell} X_+$$

und unter dem Γ-Modul F wird dies zu

$$F(\sigma) : P'_n F(X_+) = F\left(\bigvee_{[n]^\ell} X_+\right) \longrightarrow F\left(\bigvee_{[n]^\ell} X_+\right).$$

Satz 3.1.14 *Die obigen Abbildungen definieren eine Operation der symmetrischen Gruppe Σ_{n+1} auf der n-ten Taylorapproximation eines jeden Γ-Moduls F.*

Beweis
Wir müssen zeigen, daß die gegebene Operation mit der Normalisierung $P'_n F \twoheadrightarrow P_n F$ verträglich ist und daß sie mit dem Randoperator δ vertauscht. Wir betrachten zunächst Schichten, d.h. Teilmengen von $[n]^\ell$ von der Form $\{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell) | \epsilon_i \neq j\}$. Eine solche Schicht geht durch ein σ aus der symmetrischen Gruppe in die Schicht über, in welcher der i-te Eintrag ungleich $\sigma(j)$ ist. Eine Diagonale $\{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell) | \epsilon_i = \epsilon_{i+1}\}$ geht ebenfalls wieder auf eine Diagonale.

Um zu zeigen, daß die Operation mit dem Randoperator vertauscht, beweisen wir, daß $F(\sigma)$ mit der j-ten Seitenabbildung δ_j^n kommutiert. Wir zeigen dazu, daß der j-te Teil des Randoperators darin besteht, alle möglichen Projektionen auf die Hyperfläche $[n]^{j-1} \times [0] \times [n]^{n-j}$ und alle in Frage kommenden Faltungsabbildungen mit alternierendem Vorzeichen zu durchlaufen. In unserem Beispiel auf Seite 31 konnte man das schon in kleinen Graden beobachten.

Lemma 3.1.15 *Die j-te Seitenabbildung δ_j^n ist*

$$\delta_j^n = F(p_{(0,1,\ldots,n)}) - \sum_{k=0}^{n} F(p_{(0,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n)}) \pm \cdots + (-1)^n \sum_{k=0}^{n} F(p_{(k)}).$$

Die $p_{(i_1,\ldots,i_\ell)}$ sind hierbei Faltungsabbildungen, welche alle Komponenten mit Markierungen $i_1, \ldots, i_\ell$ an der Stelle j überlappen und alle anderen Komponenten auf den Grundpunkt $+$ abbilden.

Beweis des Lemmas
Wir zeigen induktiv, daß $\delta_j \circ \delta_j^i$ von der Form

$$\begin{aligned}&F((id_{(n-i-2)}, p_{(n-i-1,n-i,\dots,n)}))\\ &\qquad - \textstyle\sum_{k=0}^{i+1} F((id_{(n-i-2)}, p_{(n-i-1,\dots,(n-i\check{+}k-1),n-i+k,\dots,n)}))\\ &\qquad \pm \cdots + (-1)^{i+1} \textstyle\sum_{k=n-i-1}^{n} F((id_{(n-i-2)}, p_{(k)})\end{aligned}$$

ist. Hierbei ist die Abbildung $(id_{(n-i-2)}, p_{(i_1,\dots,i_\ell)})$ diejenige, welche die Komponenten mit den Markierungen $0, \dots, n-i-2$ an der Stelle j identisch abbildet und die Komponenten mit Markierungen $\{i_1, \dots, i_\ell\}$ überlappt.
Die zweifache Iteration $\delta_j \circ \delta_j$ enthält die Terme

$$\begin{aligned}&F(\pi_> \circ \pi_>) - F(\pi_> \circ \pi_1) - F(\pi_> \circ \pi_2) - F(\pi_1 \circ \pi_>) + F(\pi_1 \circ \pi_1) + F(\pi_1 \circ \pi_2)\\ &\quad - F(\pi_2 \circ \pi_>) + F(\pi_2 \circ \pi_1) + F(\pi_2 \circ \pi_2).\end{aligned}$$

Aber die Summanden $\pi_1^j \circ -$ sind alle gleich, also heben sich in der Summe zwei Terme weg, und es ergibt sich die gewünschte Formel. Für $n \leq 2$ ist damit die Behauptung gezeigt.

Sei die Behauptung für i schon bewiesen und sei $n > 2$. Die Iteration $\delta_j \circ \delta_j^i$ besteht dann aus drei Sorten von Summanden: Zum einen treten Terme auf wie $F(\pi_1^j \circ -)$. Diese Summanden sind wieder alle gleich, ihre Vorzeichen alternieren und ihre Anzahl ist $2^{i+1} - 1$, also ungerade. Deshalb bleibt von ihnen nur ein Term übrig, und dieser ist gleich $F(id_{(n-i-2)}, p_{(n-i-1)})$. Alle anderen auftretenden Terme – also die der Form $\pi_2^j \circ (-)$ oder $\pi_>^j \circ (-)$ – sind verschieden und ergeben gerade alle Möglichkeiten von Faltungsabbildungen wie behauptet.

$\square$

Mit der Aussage des Lemmas folgt nun leicht, daß die Operation der symmetrischen Gruppe mit dem Randoperator vertauscht, weil offensichtlich die Komposition

$$F(\sigma) \circ \left(F(p_{(0,1,\dots,n)}) - \sum_{k=0}^{n} \circ F(p_{(0,\dots,\check{k},\dots,n)}) \pm \cdots + (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \circ F(p_{(k)}) \right)$$

gerade

$$\begin{aligned}&F(p_{(\sigma(0),\sigma(1),\dots,\sigma(n))}) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} F(p_{(\sigma(0),\dots,\sigma(k-1),\sigma(k+1),\dots,\sigma(n))}) \pm \cdots\\ &\qquad\qquad + (-1)^n \textstyle\sum_{k=0}^{n} F(p_{(\sigma(k))})\end{aligned}$$

ergibt und hierin treten dieselben Summanden auf wie in $\delta_j^n \circ F(\sigma)$; lediglich ihre Reihenfolge ist permutiert. $\square$

3.2 Modellkategoriestruktur für Kettenkomplexe von Γ-Moduln

Die Kategorie der Funktoren von endlichen punktierten Mengen Γ in eine Kategorie von Kettenkomplexen ist auf natürliche Weise filtriert: Die n-te Filtrierungsstufe besteht dabei aus Funktoren, deren homologischer Grad kleiner oder gleich n ist. Die Taylorapproximationen $P_n(-)$ bilden einen beliebigen Funktor in die n-te Filtrierungsstufe ab.

Lokalisierungen der gewöhnlichen Modellkategoriestruktur für Γ-Kettenkomplexe liefern eine Folge von Modellkategorien, die dieser Filtrierung Rechnung trägt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Modellkategoriestruktur $\mathcal{T}_n$, in der ein Funktor F genau dann fibrant ist, wenn die natürliche Abbildung $F \to P_nF$ objektweise eine schwache Äquivalenz von Kettenkomplexen ist. Insbesondere lassen die Anforderungen an einen Funktor immer weiter nach: In der ersten Struktur $\mathcal{T}_1$ zur linearen Approximation ist ein fibranter Funktor homologisch vom Grad 1, während mit wachsendem n die Fibranzbedingungen in $\mathcal{T}_n$ schwächer werden. Der Limesfall entspricht der Struktur von Funktoren mit Werten in Kettenkomplexen, in der jeder Funktor fibrant ist.

In [Re] hat Renaudin eine Lokalisierung über eine lokalisierende Unterkategorie konstruiert. Ein früherer Ansatz geht auf Lydakis zurück, der in [Ly] eine Modellkategorie für simpliziale Funktoren definiert hat, in der lineare Funktoren, die punktweise fibrant sind, die fibranten Objekte sind.

Für nichtnegative Kettenkomplexe von R-Moduln $Ch(R)$ über einem Ring R gibt es eine Standardmodellkategoriestruktur, wie sie z.B. in [D-S, Abschnitt 7] angegeben ist. Die einzelnen Klassen sind wie folgt zu definieren:

schwache Äquivalenzen	Isomorphismen in der Homologie
Faserungen	Abbildungen, die in positiven Graden surjektiv sind
Kofaserungen	gradweise spaltende Monomorphismen mit gradweise projektivem Kokern

Der Nachweis, daß diese Struktur wirklich eine Modellkategoriestruktur liefert, benutzt nicht, daß es sich um Kettenkomplexe von R-Moduln handelt; der Beweis funktioniert ebenso für Kettenkomplexe, die auf einer beliebigen abelschen Kategorie mit genügend Projektiven definiert sind. Die Objekte der Kategorie der Γ-Kettenkomplexe $Ch(R)^\Gamma$ sind Kettenkomplexe auf der Kategorie der Γ-Moduln; daher gibt es eine kanonisch gegebene Modellstruktur mit den obigen Klassen.

- Schwache Äquivalenzen sind also Abbildungen, welche Isomorphismen in der Homologie liefern. Dabei ist für einen Γ-Kettenkomplex F die Homologie $H_k F$ ein Γ-Modul. Insbesondere ergeben solche Abbildungen punktweise, d.h. für jedes Objekt aus Γ einen Isomorphismus in der Homologie.
- Die Kofaserungen sind die gradweise spaltenden Monomorphismen in der Kategorie der Γ-Moduln und haben gradweise einen projektiven Kokern, d.h. typischerweise ist ein solcher Kokern eine direkte Summe aus den Standardprojektiven Γ^n.
- Faserungen sind in positiven Graden surjektive Abbildungen von Γ-Moduln.

Der Kernpunkt in der Definition dieser Modellkategoriestruktur ist die Definition von Sphären- und Scheibenobjekten.

Definition 3.2.1 *Sei F ein Γ-Modul. Dann ist die n-*Sphäre *$\mathbb{S}^n(F)$ auf F der Γ-Kettenkomplex, der nur im Grad n aus dem Γ-Modul F besteht. Der Scheibenkomplex $\mathbb{D}^n(F)$ auf F vom Grad n besteht sowohl im Grad $n-1$ als auch im Grad n aus F und hat als Differential die Identität.*

Diese Definition ist analog zu der Definition für gewöhnliche Moduln. Man erhält eine kanonische Abbildung von $\mathbb{S}^{n-1}(F)$ in $\mathbb{D}^n(F)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1}(F): & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathbb{D}^n(F): & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "id"] & F \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Faserungen und triviale Faserungen lassen sich nun durch Hochhebungseigenschaften bezüglich Abbildungen zwischen diesen einfachen Objekte charakterisieren:

Lemma 3.2.2 *Eine Abbildung $f: G \to G'$ ist genau dann eine Faserung, wenn sie die rechte Hochhebungseigenschaft für die Abbildungen $0 \to \mathbb{D}^n(\Gamma^k)$ für $n \geq 1, k \geq 0$ hat. Eine Abbildung ist genau dann eine azyklische Faserung, wenn sie die rechte Hochhebungseigenschaft für die Abbildungen $\mathbb{S}^{n-1}(\Gamma^k) \hookrightarrow \mathbb{D}^n(\Gamma^k)$ hat.*

Beweis
Ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{D}^n(\Gamma^k) \arrow[r] & G' \end{tikzcd}$$

entspricht einem Element in $G'[k]_n$. Eine Hochhebung gibt dementsprechend ein Element in $G[k]_n$; also ist f surjektiv in positiven Graden. Für das zweite Hochhebungsproblem sieht man, daß ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1}(\Gamma^k) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{D}^n(\Gamma^k) \arrow[r] & G' \end{tikzcd}$$

einem Zykel in $G[k]_{n-1}$ zusammen mit einem Element in $G'[k]_n$ entspricht, so daß f den Zykel auf den Rand des Elementes in $G'[k]_n$ abbildet. Man sieht leicht, daß f surjektiv auf der Homologie ist, falls eine Hochhebung existiert. Für die Injektivität auf Homologieniveau betrachte man ein Element in $G[k]_n$, dessen Bild unter f ein Rand ist. Die Hochhebung findet dann ein Element im Grad $k+1$, dessen Rand genau das Ausgangselement ist.

□

Mit Hilfe dieser Sphären- und Scheibenkomplexe kann man nun nachweisen, daß die Kategorie der Γ-Kettenkomplexe von R-Moduln eine geschlossene Modellkategorie ist.

Bemerkung 3.2.3 *Die Mengen $I := \{\mathbb{S}^{n-1}(\Gamma^k) \hookrightarrow \mathbb{D}^n(\Gamma^k)\}$ und $J := \{0 \hookrightarrow \mathbb{D}^n(\Gamma^k)\}$ geben $Ch(R)^\Gamma$ die Struktur einer kofibrant erzeugten Modellkategorie. (siehe [H, Abschnitt 2.1])*

Bemerkung 3.2.4 *Im allgemeineren Fall einer abelschen Kategorie mit genügend vielen Projektiven nimmt man die Scheiben und Sphären auf diesen Projektiven und bekommt eine analoge Struktur.*

Bemerkung 3.2.5 *Man sieht leicht, daß die obige Modellkategoriestruktur eigentlich ist.*

3.3 Lokalisierte Modellkategoriestrukturen angepaßt an die Taylorapproximation

Für jeden Approximationsschritt im Taylorturm existiert eine passende Modellkategorie. „Passend“ heißt hierbei, daß die schwachen Äquivalenzen gerade die $H_*P_n(-)$-Isomorphismen sind. Zu diesem Zweck müssen wir unsere Standardmodellstruktur an den Funktoren $P_n(-)$ lokalisieren.

Die Modellkategorie der Γ-Kettenkomplexe mit der Standardstruktur ist eigentlich. Die lokalisierte Modellstruktur ist dann über die folgenden Klassen definiert: Wir nennen eine Abbildung f eine

P_n-Äquivalenz,	falls $P_n(f)$ eine schwache Äquivalenz in der herkömmlichen Struktur ist,
P_n-Kofaserung,	falls sie eine Kofaserung in der gewöhnlichen Modellkategoriestruktur für Γ-Kettenkomplexe ist,
P_n-Faserung,	falls sie die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich aller Kofaserungen hat, die gleichzeitig P_n-Äquivalenzen sind.

Wir bezeichnen diese Struktur mit $\mathcal{T}_n$. Die Transformationen $P_n(-)$ haben drei besonders schöne Eigenschaften:

1. Die Transformationen $P_n(-)$ erhalten schwache Äquivalenzen.
2. Die Abbildungen $P_n(p_n) : P_n(F) \to P_n(P_nF)$ sind schwache Äquivalenzen.
3. Die Klasse der P_n-Äquivalenzen ist abgeschlossen gegenüber Pullbacks entlang P_n-Faserungen und Pushouts entlang Kofaserungen.

Die dritte Eigenschaft folgt aus der Exaktheit der Transformationen P_n, der Eigentlichkeit der Standardmodellstruktur für Γ-Kettenkomplexe und der Tatsache, daß P_n-Faserungen surjektiv sind in positiven Graden.

Unter diesen Voraussetzungen ist $\mathcal{T}_n$ wieder eine eigentliche Modellkategorie. Bousfield und Friedlander [B-F] haben dies für simpliziale Modellkategorien bewiesen; in dem Buch von Goerss und Jardine [Go-J] ist ein allgemeiner Beweis gegeben. Sie zeigen folgendes Theorem:

Theorem 3.3.1 *[Go-J, Theorem X.4.1]*
Ist $\mathcal{C}$ eine eigentliche geschlossene Modellkategorie und ist $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein Endofunktor, der die Eigenschaften 1,2 und 3 von oben erfüllt und für den es eine natürliche Transformation $\eta_X : X \to Q(X)$ gibt, dann gibt es eine geschlossene eigentliche Modellkategoriestruktur auf $\mathcal{C}$, so daß die schwachen Äquivalenzen die $Q(-)$-Äquivalenzen sind, die Kofaserungen aus der bisherigen Struktur übernommen werden können und die Faserungen gerade durch die rechte Hochhebungseigenschaft charakterisiert sind.

Für den Endofunktor $P_n(-) : Ch^\Gamma(R) \to Ch^\Gamma(R)$ erhält man mit [Go-J, Lemma X.4.4], daß die fibranten Objekte in der Modellkategorie $\mathcal{T}_n$ gerade die Objekte F sind, für welche die Transformation $p_n : F \to P_nF$ eine schwache Äquivalenz von Γ-Kettenkomplexen induziert, also Funktoren, die homologisch vom Grad n sind. Insbesondere sind die Approximationsschritte P_nF selbst fibrant in $\mathcal{T}_n$.

Kapitel 4

Homologie der Approximationsschritte

4.1 Die höheren Q-Konstruktionen für Mengen

Für die Interpretation der Homologie der gewöhnlichen Eilenberg-MacLane Konstruktion war es nützlich, eine Hilfskonstruktion einzuführen. Pirashvili definiert in [P1] eine kubische Konstruktion für Mengen SQ_*. Dieser Komplex verbindet die Homologie von $Q_*(A)$ - und dies ist die Homologie der ersten Approximation $P_1\mathbb{Z}\{A\{-\}\}[1]$ an der Stelle [1] - mit der stabilen Homologie von Eilenberg-MacLane-Räumen. Die verallgemeinerte Version von SQ_* gibt uns eine Interpretation der Homologie der höheren kubischen Konstruktionen.

Sei $X_+ \in \Gamma$. Definiere $\widetilde{SQ}^k_n(X_+)$ als den freien R-Modul erzeugt von $[k]^n = \{+, 1, \ldots, k\}^n$-Tupeln paarweise disjunkter Teilmengen von X. Zum Beispiel ist $\widetilde{SQ}^k_0(X_+)$ erzeugt von $(S), S \subset X$, und $\widetilde{SQ}^k_1(X_+)$ enthält Elemente wie $\chi = (S_0, \ldots, S_k)$ mit $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $S_i \subset X$. Abbildungen $f : X_+ \to Y_+$ aus Γ induzieren Morphismen

$$f^* : \widetilde{SQ}^k_*(Y_+) \longrightarrow \widetilde{SQ}^k_*(X_+),$$

indem man von einem Tupel paarweise disjunkter Teilmengen von Y das Tupel der Urbilder in X bildet.

Der Randoperator für $\widetilde{SQ}^k_*$ ist ähnlich definiert wie der Randoperator der Taylorapproximation. Im Grad $* = 1$ und für $k = 2$ ist $\delta : \widetilde{SQ}^2_1(X_+) \to \widetilde{SQ}^2_0(X_+)$ zum Beispiel gegeben durch:

$$\delta(S, T, U) = (S \cup T \cup U) - (S \cup T) - (S \cup U) - (T \cup U) + (S) + (T) + (U)$$

Dabei sind S, T, U paarweise disjunkte Teilmengen von X. Für den Rand $\delta : \widetilde{SQ}^k_\ell(X_+) \to \widetilde{SQ}^k_{\ell-1}(X_+)$ benutzen wir ähnliche Projektionsabbildungen wie für den Rand der P_nF, welche die letzten beziehungsweise vorletzten $(k+1)^{\ell-1}$ Teilmengen weglassen. Statt der Überlappung der Komponenten mit Markierungen k und $k-1$ an der j-ten Stelle nimmt man nun die Vereinigung der entsprechenden Teilmengen. Wegen der optischen Ähnlichkeit der Randoperatoren bezeichnen wir die Randabbildung für $\widetilde{SQ}^k_*$ ebenfalls mit δ und ihre Komponenten mit δ_j und hoffen, daß dies nicht zur endgültigen Verwirrung führt.

Der endgültige Komplex $SQ_n^k(X_+)$ ist wieder als Kokern definiert; nämlich der Kokern nach allen Elementen in $\widetilde{SQ}_n^k(X_+)$, die nur an Teilmengen aus der Menge der Schichten oder der Diagonalelemente Einträge haben, die nicht gleich der leeren Menge sind. Für $k = 2$ nimmt man also zum Beispiel folgende Elemente heraus: $(\emptyset)$ im Grad 0, Erzeuger der Form $(\emptyset, S, T)$, $(S, T, \emptyset)$ und $(S, \emptyset, T)$ im Grad 1 mit zwei disjunkten Teilmengen $S, T \subset X$, und im Grad 2 entfernt man zum einen Elemente wie

$$\begin{pmatrix} \emptyset & S_1 & S_2 \\ \emptyset & T_1 & T_2 \\ \emptyset & U_1 & U_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \emptyset \\ T_1 & T_2 & \emptyset \\ U_1 & U_2 & \emptyset \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & \emptyset & S_2 \\ T_1 & \emptyset & T_2 \\ U_1 & \emptyset & U_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & T_1 & U_1 \\ S_2 & T_2 & U_2 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \ldots$$

mit paarweise disjunkten Teilmengen S_i, T_i, U_i aus X und Diagonalelemente

$$\begin{pmatrix} S & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & T & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & U \end{pmatrix}.$$

4.1.1 Der homologische Grad von SQ_*^n

Es wird sich herausstellen, daß der homologische Grad von SQ_*^n erwartungsgemäß n ist. Wir bringen diesen Funktor bald mit der n-ten Approximation P_n in Verbindung und können damit ihre Homologie als abgeleiteten Funktor beschreiben.

Proposition 4.1.1 *Der Funktor $SQ_*^n : \Gamma^{op} \to Ch(R)$ ist homologisch vom Grad n.*

Beweis
Diese Aussage kann man durch eine explizite Kettenhomotopie einsehen. Wir definieren

$$\mathcal{H} : SQ_\ell^n(X_+^0 \vee \ldots \vee X_+^n) \longrightarrow SQ_{\ell+1}^n(X_+^0 \vee \ldots \vee X_+^n)$$

auf den Erzeugern wie folgt: Ein erzeugendes Element aus $SQ_\ell^n(X_+^0 \vee \ldots \vee X_+^n)$, gegeben als ein $[n]^\ell$ Tupel von Teilmengen $\chi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell)$ aus $X_+^0 \vee \ldots \vee X_+^{n+1}$ und indiziert über $\epsilon_i \in [n]$, bilden wir ab auf

$$\mathcal{H}(\chi)(i, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell) := \chi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell) \cap X^i \text{ für } 0 \leq i \leq n.$$

Dies liefert eine Homotopie zwischen der Nullabbildung und der Abbildung, deren Bild (vergleiche 2.4.1) der $(n+1)$ste Mischeffekt ist. $\square$

4.2 Die Homologie der höheren Q-Konstruktionen

In diesem Abschnitt geben wir ein Modell für $P_nF[1]$ an, das für die Berechnung der Homologie hilfreich ist.

Definition 4.2.1 *Die n-te Q*-Konstruktion eines Funktors $F : \Gamma \to R$-*Mod* *ist definiert als*

$$Q_*^n(F) := SQ_*^n \otimes_\Gamma F \in Ch(R)$$

Man sieht leicht, daß die n-te Q-Konstruktion isomorph zur n-ten Taylorapproximation ausgewertet an der Stelle $[1] \in \Gamma$ ist, weil

$$\widetilde{SQ}_\ell^n \otimes_\Gamma F \cong \Gamma_{[n]^\ell} \otimes_\Gamma F \cong F([n]^\ell)$$

und weil die Identifizierungen durch die Relationen ineinander übergehen. Also ist $Q_*^n(F)$ gerade der Wert der n-ten Taylorapproximation P_nF auf [1]:

$$Q_*^n(F) \cong P_nF[1].$$

Der Fall $n = 1$ gibt die übliche Eilenberg-MacLane-Konstruktion eines Funktors, wie sie in [P4, Teil 4], [J-P, Abschnitt 2] und [J-McC2] betrachtet wird. Für eine abelsche Gruppe A ist Q_*^n des Funktors $\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$ gerade die n-te kubische Konstruktion für A.

Die Q-Konstruktion eines Funktors F hat eine Interpretation als abgeleiteter Funktor. Für die Homologie der n-ten Q-Konstruktion $Q_*^n(F)$ finden wir ebenfalls eine Interpretation als Tor-Funktor, weil sich SQ_*^n als projektive Auflösung eines Funktors auffassen läßt. Für die weiteren Rechnungen ist das folgende Lemma entscheidend.

Lemma 4.2.2 *Die Γ^{op}-Kettenkomplexe SQ_*^n sind gradweise projektiv und besitzen nur Homologie im Grad null.*

Beweis
Die Projektivität der SQ_*^n ist klar, weil sie Quotienten der darstellbaren Funktoren Γ_S mit $S = [n]^\ell$ sind und weil die Projektionen spaltend sind; es

gibt Schnitte von SQ_*^n nach $\widetilde{SQ}_*^n$, die genauso definiert werden wie in [J-P, 2.3]. Wir müssen also noch zeigen, daß

$$H_i SQ_*^n = \begin{cases} 0 & : \quad i > 0 \\ \neq 0 & : \quad i = 0 \end{cases}$$

Für kleine $[\ell]$ ist $SQ_i^n[\ell] = 0$, genauer

$$SQ_i^n[\ell] = 0 \quad \forall i > 0 \quad \text{und} \quad \ell \leq n$$

einfach, weil man nicht genügend Möglichkeiten hat, Teilmengen auszuwählen.

Zuerst zeigen wir, daß der Randoperator von $SQ_1^n[\ell]$ nach $SQ_0^n[\ell]$ für alle $\ell \leq n$ trivial ist. Ist also $\ell \leq n$, und ist $(S_0, \ldots, S_n)$ ein $n+1$-Tupel paarweise disjunkter Teilmengen von $\{1, \ldots, \ell\}$, so muß mindestens eines der S_i leer sein, und das Element ist ein Schichtelement.

Allgemein hat SQ_*^n nur Homologie im Grad null, weil es homologisch vom Grad n ist und weil sich für $[1], \ldots, [n]$ keine Homologie in höheren Dimensionen findet. □

Wir setzen nun

$$t^n := \operatorname{coker}(SQ_1^n \xrightarrow{\delta} SQ_0^n)$$

Damit ist $SQ_*^n \to t^n$ also eine projektive Auflösung, und es ergibt sich nun direkt für die Homologie der höheren Q-Konstruktionen:

Theorem 4.2.3

$$H_* Q_*^n(F) = H_*(SQ_*^n \otimes_\Gamma F) = Tor_*^\Gamma(t^n, F).$$

□

Auf einer endlichen punktierten Menge X_+ ist $t^n(X_+)$ also die freie abelsche Gruppe auf allen nichtleeren Teilmengen von X modulo der Relation

$$(S_0 \cup \ldots \cup \ldots S_n) - \sum_{i=0}^{n} (S_0 \cup \ldots \cup \check{S}_i \cup \ldots \cup S_n) \pm \cdots + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (S_i) = 0.$$

Deshalb ist $t^n(X_+)$ von Teilmengen $S \subset X$ mit $|S| \leq n$ erzeugt. Ist $f : X_+ \longrightarrow Y_+$ ein Morphismus in Γ, so ist die Abbildung $f^* : t^n(Y_+) \longrightarrow t^n(X_+)$

gegeben durch das Bilden der Äquivalenzklasse der Urbilder: Ist $S \subset Y$ mit $|S| \leq n$, und ist die Mächtigkeit des Urbildes von S unter f ebenfalls kleiner oder gleich n, so wird S auf $f^{-1}(S)$ abgebildet. Ist hingegen die Mächtigkeit von $f^{-1}(S)$ größer als n, so ist $f^{-1}(S)$ in $H_0(SQ^n_*)$ äquivalent zu einer alternierenden Summe von Teilmengen von X mit Kardinalität kleiner oder gleich n. Der Grad von t^n ist n. Der i-te Mischeffekt von t^n ist gegeben durch

$$cr_i(t^n)(X^0_+, \dots, X^i_+)$$

$$= coker \left(\bigoplus_{j=0}^{i} t^n(X^0_+ \vee \dots \vee \check{X}^j_+ \vee \dots \vee X^i_+) \xrightarrow{\oplus r^*_j} t^n(X^0_+ \vee \dots \vee X^i_+) \right).$$

Die Γ-Moduln t^n verhalten sich relativ kompliziert auf Morphismen. Über die Dold-Kan-Korrespondenz (vergleiche 2.5) kann man einfachere Funktoren finden, zu denen die t^n isomorph sind:

Es sei $\mathcal{B}_n : \Gamma \longrightarrow R-$Mod der Funktor, den wir in 2.4 definiert haben.

Proposition 4.2.4 *Die Funktoren t^n und $\mathcal{B}^*_n$ sind zueinander isomorph.*

Beweis
Mit der Dold-Kan-Korrespondenz genügt es nachzuweisen, daß die Funktoren $\mathcal{B}^*_n$ und t^n isomorphe Mischeffekte haben. Die Mischeffekte der Funktoren $\mathcal{B}_n$ haben wir aber schon in 2.5 berechnet. Für die dualen Funktoren erhält man analog

$$cr_i\mathcal{B}^*_n \cong \begin{cases} R\{\{1, \dots i\}\}^* & \text{falls} \quad i \leq n \\ 0 & \text{für} \quad i > n \end{cases}$$

Der Mischeffektfunktor $cr(t^n)$ ergibt sich leicht: Der i-te Mischeffekt von t^n ist isomorph zum freien R-Modul erzeugt von der Menge $\{1, \dots, i\}$ für $i \leq n$.

Auf Objekten sind also die Funktoren $cr(t^n)$ und $cr(\mathcal{B}^*_n)$ isomorph; auf Morphismen in Ω verhalten sich $cr(t^n)$ und $cr\mathcal{B}^*_n$ wie folgt: Eine Surjektion $g : \underline{\ell} \to \underline{m} \in \Omega$ bildet für $\ell \leq n$ einen Erzeuger $\{1, \dots, m\}^*$ in $cr_m(\mathcal{B}_n)$ auf die Äquivalenzklasse von $\sum_{g(S)=\{1,\dots,m\}} S^*$ im Kokern der r^*_i ab. Die eventuell auftretenden Summanden S^* mit $S \subsetneq \{1, \dots, \ell\}$ sind aber im Bild der r^*_i enthalten, d.h. $g^*\{1, \dots, m\}^* = \{1, \dots, \ell\}^*$. Ist $\ell > n$ so induziert g die triviale Abbildung. Für den Γ-Modul t^n induziert eine Surjektion $g : \underline{\ell} \to \underline{m}$ für $\ell \leq n$ eine Bijektion $g^*\{1, \dots, m\} = \{1, \dots, \ell\}$, und sie induziert die Nullabbildung für $\ell > n$.

Also erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Funktoren.

□

Bemerkung 4.2.5 *Einen Isomorphismus direkt auf der Seite der Γ-Moduln anzugeben, ist nicht ganz so einfach: Es gibt einen Isomorphismus, der über Transformationen*

$$\mathcal{U} : (\Gamma_1)^* \longleftrightarrow \mathcal{B} : \mathcal{V}$$

definiert ist. Der Funktor $\mathcal{B}$ ordnet einer endlichen punktierten Menge X_+ den freien R-Modul auf allen nichtleeren Teilmengen $S \subset X$ zu. Es bezeichne S^* das duale Element einer Teilmenge $S \subset X$. Die Transformation $\mathcal{U}$ ordnet einem Erzeuger S^* aus $(\Gamma_1)^*(X_+)$ den Wert

$$\mathcal{U}(S^*) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T|-|S|} T$$

in $\mathcal{B}(X_+)$ zu. Für eine endliche Teilmenge $S \subset X$ sei

$$\mathcal{V}(S) = \sum_{S \subset T} T.$$

Durch Einschränkung liefern diese Transformationen Isomorphismen zwischen $(t^n)^*$ und $\mathcal{B}_n$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & (t^n)^* \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\mathcal{U}_n"] & (t^{n+1})^* \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\mathcal{U}_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & (\Gamma_1)^* \arrow[d, shift left, "\mathcal{U}"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{B}_n \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\mathcal{V}_n"] & \mathcal{B}_{n+1} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\mathcal{V}_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{B}. \arrow[u, shift left, "\mathcal{V}"]
\end{tikzcd}$$

Dualisiert man diese Abbildungen, so erhält man den gewünschten Isomorphismus der Γ-Moduln t^n und $\mathcal{B}_n$.

4.2.1 Die Homologie der Homotopiefasern

Die Homotopiefaser D_nF ist ein Maß für die Differenz der n-ten und $(n-1)$-sten Approximation. Ihre Homologie läßt sich entsprechend durch die Verschiedenheit der Funktoren t^n und t^{n-1} beschreiben: Es gibt eine natürliche Transformation $t^n \xrightarrow{\phi} t^{n-1}$. Auf Objekten X_+ aus Γ ist ϕ_{X_+} auf den Erzeugern $S \subset X$ durch die Projektionsabbildung definiert

$$t^n(X_+) = SQ_0^n(X_+)/\delta SQ_1^n(X_+) \longrightarrow SQ_0^{n-1}/\delta SQ_1^{n-1}(X_+) = t^{n-1}(X_+),$$

d.h. ein Erzeuger $S \subset X$ mit Mächtigkeit n ist in t^{n-1} äquivalent zu einer alternierenden Summe von Mengen mit Mächtigkeit $\leq n-1$. Wir setzen θ^n als den Kern von ϕ

$$\theta^n := \ker(t^n \xrightarrow{\phi} t^{n-1}).$$

Dieser Funktor hat nur nichttriviale Werte auf Mengen $X_+ \in \Gamma$ mit $|X| \geq n$. Die Erzeuger sind dann von der Form

$$\left(\{s_1, \dots, s_n\} - \sum_{i=0}^{n} \{s_1, \dots, \check{s}_i, \dots, s_n\} \pm \dots + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \{s_i\}\right)$$

mit $\{s_1, \dots, s_n\} \subset X$ und $|\{s_1, \dots, s_n\}| = n$.

Zu θ^n findet man über die Dold-Kan-Korrespondenz ebenfalls eine einfachere Entsprechung: Wir betrachten folgende exakte Sequenz von Γ-Moduln

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{B}_n/\mathcal{B}_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Die dazu duale Sequenz (siehe 2.2.1) ist wieder exakt

$$0 \longrightarrow (\mathcal{B}_n/\mathcal{B}_{n-1})^* \longrightarrow \mathcal{B}_n^* \longrightarrow \mathcal{B}_{n-1}^* \longrightarrow 0$$

Proposition 4.2.6 *Die Funktoren θ^n und $(\mathcal{B}_n/\mathcal{B}_{n-1})^*$ sind zueinander isomorph.*

□

Bemerkung 4.2.7 *Morphismen aus Ω, die keine Endomorphismen von $\underline{n}$ sind, induzieren auf den Funktoren $cr(\theta^n)$ und $cr((\mathcal{B}_n/\mathcal{B}_{n-1})^*)$ immer triviale Abbildungen.*

Für die Homologie der Homotopiefaser der Approximationsschritte n und $n-1$ erhält man über die übliche lange exakte Sequenz eine Interpretation als abgeleiteter Funktor von θ^n.

Proposition 4.2.8 *Die Homologie der Homotopiefaser D_nF_* ausgewertet auf dem Objekt $[1]$ ist*

$$H_*(D_nF[1]) = Tor_*^{\Gamma}(\theta^n, F).$$

Beweis
Für einen Kettenkomplex C_* notieren wir mit sh_1C_* den um eins verschobenen Kettenkomplex, d.h. $(sh_1C_*)_k = C_{k-1}$. Wir werden für den Funktor $F \mapsto H_*(D_nF[1])$ die universelle Eigenschaft des Tor-Funktors nachweisen. Wir zeigen, daß

1) $H_*(D_n(\quad)[1])$ kurze exakte Folgen von Funktoren

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

in lange exakte Sequenzen umwandelt:

$$\begin{array}{cccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & H_{\ell+1}(D_n(F'')[1]) \\ \longrightarrow & H_\ell(D_n(F')[1]) & \longrightarrow & H_\ell(D_n(F)[1]) & \longrightarrow & H_\ell(D_n(F'')[1]) \\ \longrightarrow & H_{\ell-1}(D_n(F')[1]) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Der Funktor $F \longrightarrow P_nF[1]$ ist exakt, daher erhalten wir für jede kurze exakte Sequenz wie oben ein kommutatives Diagramm der Form:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & P_{n-1}F'[1] \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1}F[1] \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1}F''[1] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & sh_1D_nF'[1] \arrow[r] \arrow[d] & sh_1D_nF[1] \arrow[r] \arrow[d] & sh_1D_nF''[1] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & sh_1P_nF'[1] \arrow[r] \arrow[d] & sh_1P_nF[1] \arrow[r] \arrow[d] & sh_1P_nF''[1] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Da die Hintereinanderschaltung $D_nF'[1] \longrightarrow D_nF''[1]$ verschwindet, können wir das 3×3-Lemma anwenden und bekommen, daß $0 \longrightarrow D_nF'[1] \longrightarrow D_nF[1] \longrightarrow D_nF''[1] \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist, und damit folgt die Behauptung.

2) Damit die beiden Funktoren übereinstimmen, müssen wir noch zeigen, daß sie auch die gleichen Werte auf projektiven Objekten annehmen. Sei also F projektiv. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P_{n-1}F[1] \longrightarrow sh_1D_nF[1] \longrightarrow sh_1P_nF[1] \longrightarrow 0$$

liefert die übliche lange exakte Folge

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow H_{k+1}P_{n-1}F[1] \longrightarrow H_kD_nF[1] \longrightarrow H_kP_nF[1] \longrightarrow \\ \longrightarrow H_kP_{n-1}F[1] \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Also ist es klar, daß $H_kD_nF[1]$ für $k > 0$ verschwindet. Für $k = 0$ ergibt die Sequenz, daß $H_0D_nF[1] \cong \ker(t^n \otimes_\Gamma F \longrightarrow t^{(n-1)} \otimes_\Gamma F)$ und dies ist $\theta^n \otimes_\Gamma F$ wegen der Projektivität von F. $\square$

4.2.2 Homologie der $P_nF[k]$

Für die lineare Approximation P_1F eines Funktors F genügt es, die Homologie auf dem Objekt $[1]$ zu kennen; alle anderen Werte bekommt man dann durch Summenbildung. Für die höheren Approximationen $P_nF, n > 1$ benötigt man dagegen auch die Werte $H_*P_nF[k]$ für $k > 1$, und man muß noch die Wirkung der Morphismen bis zur Stufe n kennen. Wir geben hier eine Formel für die Werte $H_*P_nF[k]$ an.

Definition 4.2.9 *Sei F ein Γ-Modul. Die m-*fache Faltung $F^{\vee m}$ eines Funktors F *ist definiert als*

$$F^{\vee m}[n] := F\left(\bigvee_m [n]\right)$$

Proposition 4.2.10 *Die Homologie der n-ten Taylorapproximation eines Γ-Moduls F läßt sich als abgeleiteter Funktor einer Faltung von F berechnen:*

$$H_*P_nF[m] = Tor_*^\Gamma(t^n, F^{\vee m})$$

Beweis
Wir zeigen, daß die beiden Kettenkomplexe $P_nF[m]$ und $P_nF^{\vee m}[1]$ isomorph sind. Dann folgt die Behauptung mit den Aussagen aus dem vorigen Abschnitt. Wir definieren einen Isomorphismus auf den unnormalisierten Gruppen $(P_n'F[m])_\ell$ und $(P_n'F^{\vee m}[1])_\ell$. Es sei

$$\phi : \bigvee_{[n]^\ell}[m] \to \bigvee_m \bigvee_{[n]^\ell}[1]$$

die Abbildung, welche durch folgende Umordnung der Elemente in $\bigvee_{[n]^\ell}[m]$ gegeben ist. Wir stellen uns die Elemente aus $\bigvee_{[n]^\ell}[m]$ lexikografisch angeordnet vor, und wir notieren die Komponente eines Elementes mit

$$0 < 1^{(0,\dots,0)} < \dots < m^{(0,\dots,0)} < \dots < 1^{(n,\dots,n)} < \dots < m^{(n,\dots,n)}.$$

Die Abbildung ϕ ordnet diese Menge um zu

$$0 < 1^{(0,\dots,0)} < \dots < 1^{(n,\dots,n)} < \dots < m^{(0,\dots,0)} < \dots < m^{(n,\dots,n)},$$

und dies identifizieren wir mit den Elementen aus $\bigvee_m \bigvee_{[n]^\ell}[1]$

$$0 < 1_1^{(0,\dots,0)} < \dots < 1_1^{(n,\dots,n)} < \dots < 1_m^{(0,\dots,0)} < \dots < 1_m^{(n,\dots,n)}$$

wobei die Komponente, die von der Summation über m kommt, unten notiert wird.

Zu zeigen ist nun, daß die Abbildungen

$$\Phi = F(\phi) : (P'_n F[m])_\ell \to (P'_n F^{\vee m}[1])_\ell$$

mit der Normalisierung verträglich sind und mit dem Randoperator kommutieren.

Daß Φ mit der Normalisierung vertauscht

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{S \text{ degeneriert}} F\left(\bigvee_S[m]\right) \arrow[r] \arrow[d] & F\left(\bigvee_{[n]^\ell}[m]\right) \arrow[d] \\
\bigoplus_{S \text{ degeneriert}} F^{\vee m}\left(\bigvee_S[1]\right) \arrow[r] & F^{\vee m}\left(\bigvee_{[n]^\ell}[1]\right)
\end{tikzcd}$$

folgt, weil ϕ durch eine Umordnung definiert ist, die auf Teilmengen $S \subset [n]^\ell$ nach dergleichen Vorschrift umordnet wie auf ganz $[n]^\ell$.

Daß der Randoperator $\delta = \sum(-1)^j \delta_j^n$ mit Φ vertauscht, sieht man für die Randkomponenten δ_j auf der unnormalisierten Approximation P'_n sofort.

$\square$

Korollar 4.2.11 *Die Homologie der Homotopiefaser ist dann wiederum gegeben durch*

$$H_* D_n F[m] \cong Tor_*^\Gamma(\theta^n, F^{\vee m}).$$

4.3 Topologische André-Quillen Homologie

In den letzten Jahren gab es verschiedene Ansätze, topologische André-Quillen Homologie zu definieren. Gegeben sei ein E_∞-Ringspektrum k, ein

E_∞-Algebra-Spektrum A über k und ein A-Modulspektrum M. Gesucht ist dann eine Homologietheorie $H^k(A,M)$, welche in der Art ihrer Definition analog ist zu André-Quillen Homologie. Hierbei heißt „analog" nicht, daß die Theorie für Eilenberg-MacLane-Spektren $H^{H(k)}(H(A),H(M))$ im flachen Fall isomorph ist zur André-Quillen Homologie von A über k mit Koeffizienten in M. Aber es ist vernünftig, zu verlangen, daß sie in Charakteristik null mit Harrison-Homologie übereinstimmt.

Definitionen einer solchen Theorie finden sich unter anderem in M. Basterras Artikel [Ba] und in den Arbeiten von A. Robinson und S. Whitehouse. Es ist bis jetzt nicht klar, welches Verhältnis zwischen den verschiedenen Ansätzen besteht.

Wir werden uns im Weiteren mit dem Ansatz von Robinson und Whitehouse befassen. Deren Fassung von topologischer André-Quillen-Homologie für E_∞-Ringspektren heißt Gamma-Homologie und wird mit H_*^Γ bezeichnet. Sind k, A und M Eilenberg-MacLane Spektren, so gibt es eine rein algebraische Fassung dieser Theorie, die sich in [R-W] findet und in [W] für kommutative Algebren explizit ausgeführt ist.

Die Definition von Gamma-Homologie haben wir in [P-R] auf allgemeine Γ-Vektorräume ausgedehnt:

4.3.1 Gamma-Homologie

Die Definition von Γ-Homologie von Γ-Vektorräumen findet sich in [P-R, Abschnitt 2]. Für jeden Γ-Vektorraum $F:\Gamma\to k$-Vekt definieren wir einen Kettenkomplex $C_*^\Gamma(F)$, der mit dem Kettenkomplex $C_*^\Gamma(A,M)$ aus [W] für Γ-Homologie einer kommutativen Algebra A über k mit Koeffizienten in einem A-Modul M übereinstimmt, wenn man den Γ-Vektorraum $F=\mathcal{L}(A,M)$ betrachtet, der ein $[n]\in\Gamma$ auf $M\otimes A^{\otimes n}$ abbildet. Ein Morphismus $f:[n]\to[m]$ in Γ bildet ein Element $a_0\otimes\cdots\otimes a_n$ aus $M\otimes A^{\otimes n}$ auf $b_0\otimes\cdots\otimes b_m$ mit $b_i=\prod_{f(j)=i}a_j$ ab.

Es sei $N\Omega_q(\underline{n},\underline{1})$ die Menge der q-Tupel der verknüpfbaren Morphismen $[f_q\mid f_{q-1}\mid\cdots\mid f_1]$ in Ω, die im Objekt $\underline{n}\in\Omega$ anfangen und im Objekt $\underline{1}$ enden:

$$\underline{n}\xrightarrow{f_1}\cdots\xrightarrow{f_q}\underline{1}.$$

Es sei $k\{N\Omega_q(\underline{n},\underline{1})\}$ der k-Vektorraum erzeugt von $N\Omega_q(\underline{n},\underline{1})$. Für jeden Morphismus $g:\underline{n}\to\underline{m}$ und jedes $i\in\underline{m}$ betrachten wir die Teilabbildung

$g^i : \underline{n^i} \to \underline{1}$ von g an i. Dabei ist n^i die Anzahl der Elemente in $g^{-1}(i)$. Ebenso zerlegen wir einen Strang aus q Morphismen $[f_q \mid f_{q-1} \mid \cdots \mid f_1]$ in Ω, die im Objekt $\underline{m}$ enden, in m Stränge, so daß jeder Strang in $\underline{1}$ endet. Mit $[f_q^{(i)} \mid f_{q-1}^{(i)} \mid \cdots \mid f_1^{(i)}]$ sei die i-te Komponente von $[f_q \mid f_{q-1} \mid \cdots \mid f_1]$ bezeichnet.

Sei $F : \Gamma \to k$-Vekt ein Γ-Vektorraum. Jede Abbildung $g : \underline{n} \to \underline{m}$ kann man zu einer punktierten Abbildung von $[n]$ nach $[m]$ fortsetzen; diese Abbildung sei weiterhin mit g bezeichnet. Analog zu dem Kettenkomplex, den S. Whitehouse in [W] definiert hat, sei der Robinson-Whitehouse-Kettenkomplex $C_*^\Gamma(F)$ definiert als

$$\begin{aligned} C_0^\Gamma(F) &= F([1]) \\ C_q^\Gamma(F) &= \textstyle\bigoplus_{n \geq 1} k\{N\Omega_q(\underline{n}, \underline{1})\} \otimes F([n]) \text{ für } q \geq 1. \end{aligned}$$

Der Randoperator $d : C_q^\Gamma(F) \to C_{q-1}^\Gamma(F)$ ist eine alternierende Summe von Seitenabbildungen

$$\partial_i : C_q^\Gamma(F) \to C_{q-1}^\Gamma(F),\ 0 \leq i \leq q.$$

Für einen Strang $[f_q \mid f_{q-1} \mid \cdots \mid f_1] \in N\Omega_q(\underline{n}, \underline{1})$ und ein $x \in F([n])$ sind die Seitenabbildungen

$$\partial_0([f_q \mid \cdots \mid f_1] \otimes x) = [f_q \mid \cdots \mid f_2] \otimes f_{1*}(x)$$

$$\partial_i([f_q \mid \cdots \mid f_1] \otimes x) = [f_q \mid \cdots \mid f_{i+1}f_i \mid \cdots \mid f_1] \otimes x \text{ für } 0 < i < q.$$

Die Beschreibung der allerletzten Seitenabbildung ist etwas komplizierter: Es sei $\underline{r}$ der Definitionsbereich von f_q, d.h. $f_{q-1} \cdots f_1 : \underline{n} \to \underline{r}$. Weiterhin sei für jedes $1 \leq j \leq r$ die Anzahl der Elemente im Urbild von j unter $f_{q-1} \cdots f_1$ mit r_j bezeichnet. Die Abbildung $\ell_j : [n] \to [r_j]$ sei diejenige, die nur auf dem Urbild von j unter $f_{q-1} \cdots f_1$ nicht verschwindet; darauf sei sie eine ordnungserhaltende Bijektion. Nun sei

$$\partial_q([f_q \mid \cdots \mid f_1] \otimes x) = \sum_{j=1}^{r} [f_{q-1}^{(j)} \mid \cdots \mid f_1^{(j)}] \otimes \ell_{j*}(x) \text{ falls } q > 1$$

und $\partial_1([\underline{n} \to \underline{1}] \otimes x) = \sum_{j=1}^{n} g_{j*}x$ für $q = 1$. Dabei ist $g_j : [n] \to [1]$ die Abbildung mit $g_j(j) = 1$ und $g_j(i) = 0$ für $i \neq j$. Man rechnet nach, daß die Seitenabbildungen die präsimplizialen Identitäten $\partial_i\partial_j = \partial_{j-1}\partial_i$ für $i < j$ erfüllen; also ist $\partial = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\partial_i$ eine Randabbildung.

Definition 4.3.1 *Mit* $H_*^\Gamma(F) = H_*(C_*^\Gamma(F))$ *bezeichnen wir die* Γ-Homologie des Funktors F. *Für den Funktor* $F = \mathcal{L}(A, M)$ *hat S. Whitehouse diesen Komplex definiert. In diesem Fall notieren wir* $H_*^\Gamma(\mathcal{L}(A, M))$ *kurz als* $H_*^\Gamma(A, M)$.

4.3.2 Ein Isomorphismus zwischen Gamma-Homologie und $\mathbf{Tor}_*^\Gamma(t, -)$

André-Quillen-Homologie und Γ-Homologie stimmen im Allgemeinen nicht überein, es sei denn man arbeitet über Charakteristik null; dann fallen beide Theorien zusammen und ergeben Harrison Homologie. In dem Artikel [P-R] haben wir gezeigt, daß für einen Γ-Modul F folgende Gruppen isomorph sind:

Theorem 4.3.2

$$\pi_*^{st}(F) \cong Tor_*^\Gamma(t, F) \cong H_*^\Gamma(F).$$

Dabei ist $\pi_*^{st}(F)$ die stabile Homotopie des Γ-Vektorraums F (siehe 2.3.1).

Bemerkung 4.3.3 *Mit Hilfe dieses Resultats gelang es A. Robinson in [Ro] die Äquivalenz der algebraischen Version der Gamma-Homologie aus [W] und der Fassung aus [R-W] zu beweisen.*

Beweis
An dieser Stelle gebe ich nur eine Beweisskizze. Der volle Beweis findet sich in [P-R, Abschnitte 4 bis 8]. Beide Funktoren π_*^{st} und H^Γ bilden kurze exakte Sequenzen von Γ-Moduln in lange exakte Sequenzen ab. Wir zeigen in [P-R], daß stabile Homotopie und Gamma-Homologie in positiven Dimensionen auf projektiven Γ-Moduln verschwinden und in Dimension null übereinstimmen; damit folgt die Behauptung. Aus dem Isomorphismus $\pi_*^{st} \cong \mathrm{Tor}_*^\Gamma$ aus [P3] ist klar, daß die stabile Homotopie auf Projektiven verschwindet. Ein unabhängiger Beweis ist in [P-R, Abschnitt 7] gegeben. Für Gamma-Homologie zeigen wir dies durch eine explizite Kettenhomotopie.

Lemma 4.3.4 *Die Gamma-Homologie der* Γ-*Moduln* $F = L^{\otimes m}$ *berechnet sich wie folgt:*

$$H_*^\Gamma(F) = 0 \text{ falls } m \neq 1$$

und für $m = 1$ *erhält man*

$$H_i^\Gamma(L) = 0, \text{ für } i \geq 1 \text{ und } H_0^\Gamma(L) \cong k.$$

Beweis
Für den Fall $m = 0$ ist $L^{\otimes 0}$ der konstante Funktor mit dem Wert k. Einen Erzeuger aus $C_q^\Gamma(F)$ bezeichnen wir mit

$$[f_q|\dots|f_1] \otimes (1).$$

Dabei ist 1 das Einselement aus k. Eine Homotopie im Grad null von der Identität zur Nullabbildung ist leicht zu raten: Es sei

$$h_0(1) := [\underline{2} \to \underline{1}] \otimes (1) - [\underline{1} \to \underline{1}] \otimes (1)$$

Für zwei Abbildungen $f : \underline{n} \to \underline{m}$ und $g : \underline{k} \to \underline{\ell}$ in Ω, ist die Summe $f \sqcup g$ ein Morphismus $f \sqcup g : \underline{n+k} \to \underline{m+\ell}$. Weiterhin definieren wir eine Faltungsabbildung $\rho : \underline{2n} \to \underline{n}$ durch

$$\rho(i) = i \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ und } \rho(n+i) = i \text{ wieder für } 1 \leq i \leq n.$$

Die präsimpliziale Homotopie $h = \sum_{i=0}^q (-1)^i h_i$ können wir nun wie folgt definieren:
$h_0([f_q|\dots|f_1] \otimes (1)) :=$

$$[f_q|\dots|f_1|\rho] \otimes (1) - [f_q|\dots|f_1|id] \otimes (1)$$

und

$$h_i([f_q|\dots|f_1] \otimes (1)) := [f_q|\dots|f_{i+1}|\rho|f_i \sqcup f_1|\dots|f_1 \sqcup f_1] \otimes (1)$$
$$-[f_q|\dots|f_{i+1}|id|f_i|\dots|f_1] \otimes (1)$$

Dies liefert in der Tat eine Homotopie zwischen der identischen Abbildung und der Nullabbildung auf C_*^Γ.

Es sei nun $m \geq 1$. Der Kettenkomplex besteht dann aus Strängen verknüpfbarer Morphismen tensoriert mit m-Tupeln $(a_1, \dots, a_m)$ mit $a_i \in \underline{n_1}$; dabei sei der Definitionsbereich der ersten Abbildung $\underline{n_1}$.
Sei $\epsilon(i)$ für $1 \leq i \leq n$ die Abbildung $\epsilon(i) : \underline{n+1} \to \underline{n}$ die den Wert $n+1$ auf i abbildet und auf allen anderen Elementen die Identität ist. Wir definieren dann h_j als

$h_0([f_q|\dots|f_1] \otimes (a_1, \dots, a_m) :=$

$$[f_q|\dots|f_1|\epsilon(a_m)] \otimes (a_1, \dots, a_{m-1}, n_1 + 1)$$

und

$h_j([f_q|\dots|f_1] \otimes (a_1, \dots, a_m) :=$

$$[f_q|\dots|f_{i+1}|\epsilon(f_j \cdots f_1(a_m))|f_i \sqcup id|\dots|f_1 \sqcup id] \otimes (a_1, \dots, a_{m-1}, n_1 + 1).$$

Dabei sei f_1 eine Abbildung, die von $\underline{n_1}$ ausgeht.

Für die Fälle $m > 1$ liefert dies eine Homotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung, aber für $m = 1$ verbindet diese Homotopie die Identität und die konstante Abbildung η:

$$\eta([f_q|\dots|f_1] \otimes (a)) := [id|\dots|id] \otimes (1).$$

□

4.3.3 Berechnung der Gamma-Homologie von $\mathbb{F}_2[x]$

Gamma-Homologie eines Polynomringes in einer Variablen $k[x]$ über einem Körper k ist also stabile Homotopie des Γ-Vektorraums $\mathcal{L}(k[x], k)$.

$$H_*^\Gamma(k[x], k) \cong \pi_*^{st}(\mathcal{L}(k[x], k)).$$

Als Γ-Vektorraum kann man $\mathcal{L}(k[x], k)$ identifizieren als $\mathrm{Sym}^* \circ L$. Daß beide Funktoren auf Objekten übereinstimmen, sieht man leicht: In beiden Fällen ist der Wert auf einem $[n] \in \Gamma$ eine Polynomalgebra in n Variablen $k[x_1, \dots, x_n]$. Ein Morphismus $f : [n] \to [m]$ induziert auf beiden Funktoren die Multiplikation und Umbenennung von Variablen.

Für einen graduierten Modul N_* bezeichnen wir mit $sh_n N_*$ den um n verschobenen Modul, d.h. $(sh_n N_*)_* = N_{*-n}$.

Proposition 4.3.5 *Die Gamma-Homologie der Polynomalgebra $\mathbb{F}_2[x]$ ist die stabile Homotopie des Funktors $Sym^* \circ L$ und diese läßt sich dadurch beschreiben, daß $\pi_*^{st}(Sym^n \circ L) = 0$ ist für $n \neq 2^h$ und daß*

$$\pi_{*+2^h-1}^{st}(Sym^{2^h} \circ L) = \pi_*^{st}(\Lambda^{2^h} \circ L) \cong \xi_{2^{h-1}} \cdot \mathbb{F}_2[\xi_0, \dots, \xi_{2^{h-1}}].$$

Zusammengefaßt erhält man

$$H_*^\Gamma(\mathbb{F}_2[x], \mathbb{F}_2) \cong \bigoplus_{h \geq 0} sh_{2^h-1}\left(\xi_{2^{h-1}} \cdot \mathbb{F}_2[\xi_0, \dots, \xi_{2^{h-1}}]\right).$$

Die ξ_i entsprechen den Erzeugern des Dualen der Steenrod Algebra und haben den Grad $2^i - 1$.

Beweis
Daß die stabile Homotopie der $\mathrm{Sym}^n \circ L$ verschwindet, falls n keine Potenz von zwei ist, haben schon Dold und Puppe in [D-P, 10.9] gezeigt. Der Isomorphismus zur stabilen Homotopie der äußeren Potenz Λ^n ergibt sich aus der üblichen Koszul-Auflösung (siehe [I, S.110])

$$0 \to \Lambda^n \to \Lambda^{n-1} \otimes \mathrm{Sym}^1 \to \cdots \to \Lambda^{n-i} \otimes \mathrm{Sym}^i \to \cdots \to \mathrm{Sym}^n \to 0$$

und aus der Tatsache, daß die stabile Homotopie der mittleren Terme verschwindet, weil die Funktoren der Form $\Lambda^{n-i} \otimes \mathrm{Sym}^i$ „diagonal" sind, d.h. es sind Bifunktoren, vor welche die Diagonalabbildung geschaltet ist (siehe [D-P, 5.22] für einen Beweis). Die explizite Form der stabilen Homotopie der äußeren Potenzen geht auf A. K. Bousfield [B, ab I.4] und J. Smith zurück und ist in [Re, S. 51] formuliert und hergeleitet worden. □

4.3.4 Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz

Für Γ-Homologie einer augmentierten kommutativen Algebra A mit Koeffizienten im Grundkörper k - also für $H_*P_1(\mathcal{L}(A,k))[1]$ - gibt es eine Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz ausgehend von André-Quillen-Homologie, welche gegen Γ-Homologie konvergiert. Die Polynomalgebra in einer Variablen übernimmt die Rolle des Grundpunkts.

Sei A eine beliebige augmentierte kommutative Algebra über einem Körper k und sei $P_* \to A$ eine freie simpliziale Auflösung von A. Die P_ℓ sind dabei von der Form $P_\ell = k[x_e | e \in E]$. Dann gilt:

Proposition 4.3.6 *Für eine augmentierte kommutative Algebra A gibt es eine Spektralsequenz*

$$E^2_{p,q} = H^\Gamma_q(k[x], k) \otimes AQ_p(A,k) \Longrightarrow H^\Gamma_{p+q}(A,k).$$

Hierbei bezeichne $AQ(-)$ André-Quillen-Homologie.

Beweis
Bildet man das punktweise Tensorprodukt (siehe 2.2.2) zweier Γ-Moduln F und G, so verhält sich Γ-Homologie additiv: Es gilt (vergleiche [P-R], S. 3)

$$H^\Gamma_*(F \otimes G) \cong H^\Gamma_*(F) \otimes G[0] \oplus F[0] \otimes H^\Gamma_*(G).$$

Gamma-Homologie eines Polynomrings in mehreren Variablen läßt sich daher auf Gamma-Homologie eines Polynomrings in einer Variablen zurückführen, weil

$$H_*^\Gamma(k[x_1, \dots, x_m], k) \cong H_*^\Gamma(k[x_1], k) \oplus \cdots \oplus H_*^\Gamma(k[x_m], k).$$

Dies gilt auch für die Polynomringe $P_\ell = k[x_e | e \in E]$, weil beide Seiten der Formel stabil sind unter Kolimites. Das Augmentationsideal einer augmentierten Algebra sei mit I bezeichnet. Die Γ-Homologie der freien simplizialen Auflösung ist damit

$$H_*^\Gamma(P_\ell, k) \cong H_*^\Gamma(k[x], k) \otimes I(P_\ell)/I^2(P_\ell).$$

Wir erhalten als E^1-Term der Spektralsequenz

$$E^1_{p,q} = H_q^\Gamma(k[x], k) \otimes \big(I(P_p)/I^2(P_p)\big) \Longrightarrow H^\Gamma_{p+q}(A, k).$$

Die Differentiale in diesem E^1-Term sind gerade die Differentiale, die aus der Auflösung stammen, und wir erhalten die gewünschte Form des E^2-Terms der Spektralsequenz. $\square$

4.4 Berechnung von $\mathrm{Tor}_*(\theta^n, \psi_m)$ in Charakteristik null

In diesem Abschnitt wählen wir als Grundring einen Körper $\mathbb{K}$ der Charaktertistik null. Wir betrachten die Funktoren $\psi_m = \mathcal{B}_m/\mathcal{B}_{m-1}$ aus 2.4 und berechnen die Homologie ihrer Homotopiefasern an der Stelle [1] vollständig. Die Funktoren ψ_m besitzen eine Auflösung ähnlich einer Koszul-Auflösung, die schon in Pirashvilis Arbeit [P3, 1.13] benutzt wird. Für ungeraden Grad $m = 2\ell + 1$ bekommt man die Auflösung

$$0 \to \Lambda^\ell \circ L \otimes L \to \Lambda^{\ell-1} \circ L \otimes \mathrm{Sym}^3 \circ L \to \cdots \to \mathrm{Sym}^{2\ell+1} \circ L \to \psi_{2\ell+1} \to 0$$

wohingegen die Auflösung für gerade $m = 2\ell$ so aussieht:

$$0 \to \Lambda^\ell \circ L \to \Lambda^{\ell-1} \circ L \otimes \mathrm{Sym}^2 \circ L \to \cdots \to \mathrm{Sym}^{2\ell} \circ L \to \psi_{2\ell} \to 0$$

Die Abbildungen in der Sequenz sind dabei

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{i+1} \circ L \otimes \mathrm{Sym}^j \circ L & \to & \Lambda^i \circ L \otimes \mathrm{Sym}^{j+2} \circ L \\ (x_0 \wedge \ldots \wedge x_i) \otimes (y_1 \cdots y_j) & \mapsto & \sum_{k=0}^i (x_0 \wedge \ldots \wedge \check{x}_k \wedge \ldots \wedge x_i) \otimes (x_k^2 y_1 \cdots y_j) \end{array}$$

beziehungsweise

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sym}^m \circ L & \to & \psi_m \\ y_1 \cdots y_m & \mapsto & \{y_1, \ldots, y_m\} \quad \mathrm{mod} \quad \mathcal{B}_{m-1}. \end{array}$$

Für die Berechnung der Tor-Gruppen muß man also die Tensorprodukte $\theta^n \otimes_\Gamma (\Lambda^i \circ L \otimes \mathrm{Sym}^j \circ L)$ verstehen.

Proposition 4.4.1 *Die Tensorprodukte, die sich aus den Auflösungen ergeben, vereinfachen sich drastisch*

$$\theta^n \otimes_\Gamma (\Lambda^i \circ L \otimes Sym^j \circ L) = \begin{cases} \mathbb{K} & \textit{für} \quad m = n, i = 0, 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $i + j = m$.

Beweis
Ist $m < n$, so ist $F_{i,j} := \Lambda^i \circ L \otimes \mathrm{Sym}^j \circ L$ vom Grad m, also von kleinerem Grad als n. Daher verschwinden die Ausdrücke

$$\theta^n \otimes_\Gamma F_{i,j} \cong cr(\theta^n) \otimes_\Omega cr(F_{i,j}) \cong (\mathbb{K} \otimes_\Omega cr(F_{i,j})(\underline{n}))/\sim \quad = 0.$$

Sei m größer als n: Wir erhalten eine Sequenz von Surjektionen

$$t^{\otimes n} \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^n \circ t \twoheadrightarrow \theta^n$$

und weil $F_{i,j}$ ein direkter Summand in $L^{\otimes m}$ ist, gelangen wir wiederum zu Surjektionen

$$t^{\otimes n} \otimes_\Gamma L^{\otimes m} \twoheadrightarrow t^{\otimes n} \otimes_\Gamma F_{i,j} \twoheadrightarrow \theta^n \otimes_\Gamma F_{i,j}.$$

Für jeden kontravarianten Funktor T ist der Mischeffekt gegeben durch

$$cr_m(T) = \mathrm{coker}\left(\bigoplus_{i=1}^{m} T[m-1] \to T[m] \right).$$

Wir hatten schon in 2.5.1 gesehen, daß $T \otimes_\Gamma L^{\otimes m} \cong cr_m(T)$ ist: Nimmt man die exakte Sequenz

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \Gamma^{m-1} \to \Gamma^m \to L^{\otimes m} \to 0$$

und tensoriert sie mit T so erhält man

$$\bigoplus_{i=1}^{m} T[m-1] \to T[m] \to T \otimes_\Gamma L^{\otimes m} \to 0.$$

Daher ist $T \otimes_\Gamma L^{\otimes m} \cong cr_m(T)$. Deshalb ist $t^{\otimes n} \otimes_\Gamma L^{\otimes m} \cong cr(t^{\otimes n})(\underline{m}) = 0$ und die Tor-Gruppen $\theta^n \otimes_\Gamma F_{i,j}$ verschwinden für $i + j = n \neq m$.
Der einzige Fall, der einen nichttrivialen Beitrag leistet, ist $m = n$. In diesem Fall ist

$$\theta^m \otimes_\Gamma F_{i,j} \cong (\mathbb{K} \otimes cr(F_{i,j})(\underline{m}))/(f^*(x) \otimes y \sim x \otimes f_*(y)) \cong \mathbb{K} \otimes_{\Sigma_m} cr(F_{i,j})(\underline{m})$$

Also gibt uns dieser Mischeffekt gerade die Koinvarianten des Σ_m-Moduls $cr(\Lambda^i \circ L \otimes \mathrm{Sym}^j \circ L)(\underline{m})$. Da $F_{i,j}$ ein Quotient von $L^{\otimes m}$ ist und weil das Nehmen von Mischeffekten exakt ist, erhalten wir

$$cr(L^{\otimes m}) \twoheadrightarrow cr(F_{i,j}) \qquad (*)$$

Lemma 4.4.2 *Als Σ_m-Modul ist $cr_m(L^{\otimes m})$ isomorph zu $\mathbb{K}[\Sigma_m]$.*

Beweis
Wir hatten schon in 2.5.2 gezeigt, daß gilt

$$cr_n(L^{\otimes m}) \cong k\left[\Omega(\underline{m}, \underline{n})\right].$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Die Folge $(*)$ reduziert sich also auf $\mathbb{K}[\Sigma_m] \twoheadrightarrow cr_m(F_{i,j})$. Nimmt man davon die Koinvarianten, so sieht man, daß die Koinvarianten von $cr_m(F_{i,j})$ entweder zu $\mathbb{K}$ oder 0 isomorph sind, weil $\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K} \otimes_{\Sigma_m} cr_m(F_{i,j})$. Wir können diese Aussage präzisieren:

Lemma 4.4.3

$$\mathbb{K} \otimes_{\Sigma_m} cr_m(F_{i,j}) \cong \begin{cases} \mathbb{K} & i = 0, 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis
Es sei $\pi_1 : L^{\otimes i} \longrightarrow \Lambda^i \circ L$ die Projektion $(x_1, \ldots, x_i) \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_i$ und $\pi_2 : L^{\otimes j} \longrightarrow \mathrm{Sym}^j \circ L$ die Abbildung $(y_1, \ldots, y_j) \mapsto y_1 \cdots y_j$. Die natürliche Transformation $L^{\otimes m} \overset{\pi_1 \otimes \pi_2}{\longrightarrow} F_{i,j}$ führt zu einer entsprechenden Abbildung auf den Mischeffekten, wenn man sie auf die Kerne der r_i einschränkt. Aber

für $i > 1$ erhalten wir $(\pi_1 \otimes \pi_2)(x_1, \dots, x_m) = x_1 \wedge \dots \wedge x_i \otimes x_{i+1} \cdots x_m$. Nimmt man Koinvarianten, so ist der entstehende Term äquivalent zu seinem Negativen und verschwindet demnach. □

Damit ist der Beweis der Proposition beendet, und wir können die Koszul-Auflösungen berechnen. Es gibt nur zwei nichttriviale Fälle

$$0 \to \mathbb{K} \to 0 \to \theta^{n-1} \otimes_\Gamma \psi_n \to 0$$

und

$$0 \to 0 \to \mathbb{K} \to \theta^n \otimes_\Gamma \psi_n \to 0.$$

Die dazugehörigen Tor-Gruppen sind

$$\mathrm{Tor}_\ell^\Gamma(\theta^n, \psi_m) = \begin{cases} \mathbb{K} & \ell = 0 \quad\quad m = n \\ \mathbb{K} & \ell = 1 \quad\quad m = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.4.1 Verbindung zur Hodge-Spektralsequenz

Die übliche Hochschild-Homologie einer kommutativen Algebra A mit Koeffizienten in einem A-Modul M ist gleich der Homotopie von $\mathcal{L}(A, M)$ ausgewertet auf der simplizialen 1-Sphäre $\mathbb{S}^1$,

$$\mathrm{Hoch}_*(A, M) = \pi_* \mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^1).$$

Hochschild-Homologie der Ordnung d ist definiert über die Auswertung auf einer simplizialen d-dimensionalen Sphäre

$$H_*^{[d]}(A, M) := \pi_*(\mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^d)).$$

Über einem Körper der Charakteristik null gibt es für gewöhnliche Hochschild-Homologie einer kommutativen Algebra A mit Koeffizienten in einem A-Modul eine Hodge-Zerlegung:

$$Hoch_n(A; M) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Hoch_n^{(i)}(A, M)$$

Diese Zerlegung hat Pirashvili in [P3] auf beliebige Γ-Moduln F ausgedehnt. Für jeden Γ-Modul F gibt es eine Spektralsequenz

$$E_{p,q}^2 \Longrightarrow \pi_{p+q} F(\mathbb{S}^d), d \geq 1,$$

mit dem $E^2_{p,q}$-Term

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad q \neq dj \\ \mathrm{Tor}^\Gamma_p(\Lambda^j \circ t, F) & \text{falls} \quad q = dj \quad \text{und} \quad d \quad \text{ungerade} \\ \mathrm{Tor}^\Gamma_p(\theta^j, F) & \text{falls} \quad q = dj \quad \text{und} \quad d \quad \text{gerade} \end{cases}$$

Für die geraden Grade besteht diese Spektralsequenz also aus der Homologie der Homotopiefaser der Taylorapproximation im j-ten Schritt ausgewertet auf dem Objekt $[1] \in \Gamma$

$$E^2_{p,q} = H_p(D_j F)([1]) \quad \text{für} \quad q = dj \quad \text{mit} \quad d \quad \text{gerade}$$

Pirashvili hat diese Spektralsequenz aufgestellt und gezeigt, daß sie in Charakteristik null mit dem E^2-Term abbricht. Für $F = \mathcal{L}(A, M)$ ergibt dieses Resultat zum einen die herkömmliche Hodge-Zerlegung, wenn man den Fall $d = 1$ betrachtet, und zum anderen resultiert daraus eine Hodge-Zerlegung für Hochschild-Homologie höherer Ordnung, wenn man die Homotopiegruppen $\pi_* \mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^d)$ betrachtet. Für gerades d erhalten wir also, daß die Summanden der Hodge-Zerlegung aus den Homologiegruppen der Homotopiefasern bestehen:

$$\mathrm{Hoch}^{[d]}_n(A, M) = \bigoplus_{p+dj=n} H_p(D_j \mathcal{L}(A, M))[1].$$

4.4.2 Anwendung auf Hochschild-Homologie höherer Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder als Grundring einen Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik null.

Bemerkung 4.4.4 *Es gibt eine Stabilisierungsabbildung von Hochschild-Homologie der Ordnung d einer kommutativen Algebra A in ihre Γ-Homologie (vergleiche 4.3.1)*

$$\begin{aligned} Hoch^{[d]}_k(A, M) = \pi_k \mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^d) \quad &\to \quad colim_l \pi_{k-d+\ell} \mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^\ell) \\ &= \pi^{st}_{k-d} \mathcal{L}(A, M) \cong H^\Gamma_{k-d}(A, M) \end{aligned}$$

Hochschild-Homologie höherer Ordnung über einem Körper mit positiver Charakteristik kann also zur Berechnung von Γ-Homologie beitragen.

Unser Beispiel über Charakteristik null dient hier aber direkt zur Berechnung der höheren Hochschild-Homologie, weil Γ-Homologie in diesem Fall mit Harrison-Homologie übereinstimmt.

Als konkretes Beispiel berechnen wir die Hochschild-Homologie gerader Ordnung der Algebra $\mathbb{K}[x]/(x^2)$; dabei sei x vom Grad null. Für ungerade Ordnung d hat Pirashvili die Gruppen $H_*^{[d]}(\mathbb{K}[x]/(x^2), \mathbb{K}[x]/(x^2))$ berechnet ([P3], 5.4). In derselben Arbeit (1.8 in [P3]) hat er gezeigt, daß der Funktor $\mathcal{L}$ für unseren Fall zerfällt und zwar in

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}[x]/(x^2), \mathbb{K}) \cong \bigoplus_k \psi_k.$$

Dies ist einfach zu sehen aus der Tatsache, daß

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}[x]/(x^2), \mathbb{K})[n] \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathbb{K}x^{\otimes i}$$

und daß Morphismen trivial operieren.

Zusammen mit der Hodge-Zerlegung für Hochschild-Homologie höherer Ordnung erhalten wir eine Aufspaltung von $H_n^{[d]}(\mathbb{K}[x]/(x^2), \mathbb{K})$ in die einfachen Terme

$$H_n^{[d]}(\mathbb{K}[x]/(x^2), \mathbb{K}) \cong \bigoplus_{i+dj=n} \bigoplus_k \mathrm{Tor}_i(\theta^j, \psi_k)$$

für gerades d. Also reduziert sich die gesamte Berechnung auf die Bestimmung der Tor-Gruppen, die wir im Abschnitt 4.4 ausgerechnet haben. Wir haben also folgendes Resultat bewiesen:

Theorem 4.4.5 *Für gerades d ist die Hochschild-Homologie der Ordnung d der Algebra $\mathbb{K}[x]/(x^2)$ mit trivialen Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik null*

$$H_n^{[d]}(\mathbb{K}[x]/(x^2); \mathbb{K}) \cong \begin{cases} \mathbb{K} & \textit{falls } d|n \\ \mathbb{K} & \textit{falls } d|n-1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

4.5 Eine Spektralsequenz für $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^n, F)$

Die Homologie der Homotopiefaser $D_nF[1]$ ist durch den Ausdruck $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^n, F)$ bestimmt. In [P2] hat Pirashvili eine Hyperhomologie-Spektralsequenz entwickelt, die gegen $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(t, F) \cong \pi_*^{st}(F)$ konvergiert. Eine Modifizierung liefert eine Spektralfolge, die gegen $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^n, F)$, also die Homologie der Homotopiefaser der n-ten Taylorapproximation D_nF ausgewertet an der Stelle [1], konvergiert. Im folgenden Abschnitt sei k ein Körper. Wir werden diese Sequenz benutzen, um in einigen Beispielen von Funktoren von Γ in die Kategorie der k-Vektorräume diese Homologie zu berechnen.

4.5.1 Iterierte Partitionen

Entscheidend für die Spektralsequenz sind bestimmte iterierte Partitionen einer natürlichen Zahl m.

Definition 4.5.1 *Wir definieren den Ausdruck p-*Partition *induktiv. Eine 1-Partition (oder auch einfach Partition) einer natürlichen Zahl m ist ein Tupel $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ mit $\ell \geq 1$ und $1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_\ell$, wobei sich die λ_i zu $m = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$ aufaddieren. Die Zahl ℓ heißt die* Länge *der Partition λ und wird mit $\ell(\lambda)$ notiert. Für $n \geq 2$ ist eine n-Partition eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ zusammen mit $(n-1)$-Partitionen λ^i von λ_i für $1 \leq i \leq \ell$. Die* Länge einer n-Partition *ist ein n-Tupel natürlicher Zahlen*

$$\ell(\lambda) = (\ell(\lambda_1) + \cdots + \ell(\lambda_l), \ell)$$

Die Menge aller p-Partitionen von n_0 mit Länge $(n_1, \ldots n_{p-1}, n)$ bezeichnen wir mit $\Pi(n_0, \ldots, n_{p-1}, n)$.

Eine 3-Partition λ der Zahl 7 der Länge $(5, 3, 2)$ ist zum Beispiel das folgende Element:

```
.  .  .  .  .  .  .
.  __    .  .  __     ((1,2),(1,1,2))
.  __    ________     ((1,2), 4)
_____    ________     (3,4)
```

Ausgehend von der gewöhnlichen Partition von 7 in $(3, 4)$ werden die Iterationen gebildet: Die Zahl drei wird in $(1, 2)$ zerlegt, und 4 wird aufgespalten in $(1, 1, 2)$.

4.5.2 Eine Auflösung rechter Ω-Moduln

Wegen der Dold-Kan-Korrespondez zwischen Γ-Moduln und Ω-Moduln 2.5 werden wir für die Aufstellung der Spektralsequenz in die Kategorie der Ω-Moduln hinüberwechseln, weil in dieser Kategorie Berechnungen leichter sind. Wir haben den Isomorphismus

$$\operatorname{Tor}_*^\Gamma(T, F) \cong \operatorname{Tor}_*^\Omega(cr(T), cr(F))$$

aus 2.5.1, d.h. ohne Einschränkung können wir die komplette Berechnung auf der Ω-Seite durchführen.

Die Kategorie Ω ist eine EI-Kategorie, d.h jeder Endomorphismus ist ein Isomorphismus. Die Endomorphismengruppe eines Elementes $\underline{n} \in \Omega$ ist die Permutationsgruppe Σ_n. In solch einer Situation erhält man eine Auflösung eines beliebigen Ω^{op}-Moduls U (siehe dazu Lücks Buch [L]). Im Grad ℓ sieht dieser Komplex rechter Ω-Moduln wie folgt aus:

$\mathcal{K}_\ell(U) :=$

$$\bigoplus U(\underline{n}_\ell) \otimes_{\Sigma_{n_\ell}} k\left\{\Omega(\underline{n}_{\ell-1}, \underline{n}_\ell)\right\} \otimes_{\Sigma_{n_{\ell-1}}} \ldots \otimes_{\Sigma_{n_1}} k\left\{\Omega(\underline{n}_0, \underline{n}_1)\right\} \otimes_{\Sigma_{n_0}} k\left\{\Omega(-, \underline{n}_0)\right\}.$$

Dabei läuft die Summe über alle $n_0 > \ldots > n_\ell$.

Die Randabbildung d schickt ein Element $(a; f_\ell, \ldots, f_0)$ mit $a \in U(\underline{n}_\ell)$ auf

$$\begin{aligned} &d(a; f_\ell, \ldots, f_0) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i (a; f_\ell, \ldots, f_{i+1} f_i, \ldots, f_0) + (-1)^k (f_\ell^*(a); f_{\ell-1}, \ldots, f_0). \end{aligned}$$

Dieser Komplex ist eine Auflösung von U (für einen direkten Beweis über eine Kettenhomotopie siehe [P2, 4.4]); daher erhalten wir für jeden Ω-Modul F eine Hyperhomologie Spektralsequenz

$$E^1_{pq} = \operatorname{Tor}_q^\Omega(\mathcal{K}_p(U), F) \Rightarrow \operatorname{Tor}^\Omega_{p+q}(U, F)$$

4.5.3 Vereinfachung der Spektralsequenz

In der obigen Form nützt die Spektralsequenz für Berechnungen recht wenig. Da wir aber nur an einem sehr speziellen Γ^{op}-Modul interessiert sind, können wir den E^1-Term drastisch vereinfachen.

Für $\theta^n : \Gamma^{op} \to k$-Moduln und $F : \Gamma \to k$-Moduln haben wir die Spektralfolge

$$E^1_{pq} = \mathrm{Tor}^\Omega_q(\mathcal{K}_p(cr(\theta^n)), cr(F)) \Rightarrow \mathrm{Tor}^\Omega_{p+q}(cr(\theta^n), cr(F)) \cong \mathrm{Tor}^\Gamma_{p+q}(\theta^n, F).$$

Aber θ^n hat nur einen nichttrivialen Mischeffekt $cr(\theta^n)(\underline{i}) = 0$ für $i \neq n$. Daher bleibt im obigen Kettenkomplex nur eine Sorte von Summanden übrig: $\mathcal{K}_\ell(U) =$

$$\bigoplus k \otimes_{\Sigma_n} k \left\{\Omega(\underline{n}_{\ell-1}, \underline{n})\right\} \otimes_{\Sigma_{n_{\ell-1}}} \ldots \otimes_{\Sigma_{n_1}} k \left\{\Omega(\underline{n}_0, \underline{n}_1)\right\} \otimes_{\Sigma_{n_0}} k \left\{\Omega(-, \underline{n}_0)\right\}.$$

Dabei erstreckt sich die Summe wieder über alle $n_0 > \ldots > n_{\ell-1} > n$. Wir benutzen eine Umformung aus [P2, Lemma 4.6] und bekommen

$$\mathrm{Tor}^\Omega_*(M \otimes_{\Sigma_n} k \left\{\Omega(-, \underline{n})\right\}, T) \cong \mathrm{Tor}^{\Sigma_n}_*(M, T(\underline{n}))$$

für alle Σ_n-Moduln M und alle Ω-Moduln T.
Diese Ergebnis kann man noch weiter reduzieren mit [P2, Lemma 4.8]: Der Σ_n-Modul

$$k \otimes_{\Sigma_n} k \left\{\Omega(\underline{n}_{p-1}, \underline{n})\right\} \otimes_{\Sigma_{n_{p-1}}} \ldots \otimes_{\Sigma_{n_1}} k \left\{\Omega(\underline{n}_0, \underline{n}_1)\right\}$$

ist isomorph zu

$$\bigoplus_{\substack{n_0 > \ldots > n_{p-1} > n \\ \lambda \in \Pi(n_0, \cdots, n)}} k \left[\Sigma_{n_0}/\Sigma_\lambda\right]$$

Hierbei läuft die Summe über die Menge der p-Partitionen von n_0 mit Länge $(n_1, \ldots n_{p-1}, n)$. Wir sind inzwischen bei folgendem E^1-Term für die Spektralsequenz angelangt:

$$E^1_{pq} = \mathrm{Tor}^\Omega_q(\mathcal{K}_p(cr(\theta^n), cr(F))) = \bigoplus_{\substack{n_0 > \ldots > n_{p-1} > n \\ \lambda \in \Pi(n, n_{p-1}, \cdots, n_0)}} \mathrm{Tor}^{\Sigma_{n_0}}_q(k \left[\Sigma_{n_0}/\Sigma_\lambda\right]; (cr(F))(\underline{n}_0))$$

Mit dem Shapiro-Lemma der Gruppenhomologie erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}^{\Sigma_{n_0}}_q(k \left[\Sigma_{n_0}/\Sigma_\lambda\right]; cr(F)(\underline{n}_0)) &\cong \mathrm{Tor}^{\Sigma_{n_0}}_q(k; k \left[\Sigma_{n_0}/\Sigma_\lambda\right] \otimes cr(F)(\underline{n}_0)) \\ &\cong H_q(\Sigma_{n_0}, \Sigma_{n_0}/\Sigma_\lambda \otimes cr(F)(\underline{n}_0)) \\ &\cong H_q(\Sigma_\lambda, cr(F)(\underline{n}_0)) \end{aligned}$$

Schlußendlich gelangen wir zur endgültigen Version der Spektralsequenz für $\mathrm{Tor}^\Gamma_*(\theta^n, F)$, also für die Homologie der n-ten Homotopiefaser $D_n F$ an der Stelle [1]:

Theorem 4.5.2 *Es gibt eine Spektralsequenz* $E^1_{p,q} \Longrightarrow Tor^{\Gamma}_{p+q}(\theta^n, F)$ *mit*

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\substack{n_0 > \cdots > n_{p-1} > n \\ \lambda \in \Pi(n_0, \cdots, n_{p-1}, n)}} H_q(\Sigma_\lambda, cr(F)(\underline{n}_0))$$

Bemerkung 4.5.3 *Man beachte, daß der* $E^1_{0,q}$*-Term für* $Tor(\theta^n, \psi_m)$ *nur aus* $Tor_q(k \otimes_{\Sigma_n} \Omega_n, cr(\psi_m)) \cong Tor_q^{\Sigma_n}(k, cr(\psi_m)(\underline{n})) \cong Tor_q^{\Sigma_n}(k,k)$ *besteht, falls* $m = n$*. In allen anderen Fällen ist dieser Term trivial.*

Bemerkung 4.5.4 *Über den rationalen Zahlen reduziert sich der obige* E^1*-Term auf die nullte Zeile.*

4.6 Das Duale der Steenrod-Algebra

Als ein Beispiel für eine konkrete Berechnung betrachten wir den Funktor

$$\begin{array}{rccl} St: & \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{F}_2 - \mathrm{Vekt} \\ & [n] & \mapsto & \mathbb{F}_2\left\{\overline{\mathbb{F}}_2\{[n]\}\right\} \end{array}$$

von der Kategorie der endlichen punktierten Mengen in die Kategorie der $\mathbb{F}_2$-Vektorräume, der eine punktierte Menge $[n]$ auf den freien reduzierten Vektorraum $\overline{\mathbb{F}}_2\{[n]\}$ abbildet und davon wiederum den frei erzeugten Vektorraum bildet. Setzt man diesen Funktor auf simpliziale punktierte Mengen fort und wertet ihn auf einem Modell einer simplizialen Sphäre aus, so ergibt die Homotopie von $St(\mathbb{S}^n)$ die Homologie eines Eilenberg-MacLane-Raumes. Da $\pi_*^{st}(St) \cong \mathrm{Tor}_*^{\Gamma}(t, St)$, sehen wir, daß die Homologie der ersten Approximation $P_1(St)$ ausgewertet an [1] gerade das Duale der Steenrod-Algebra $\mathfrak{A}(2)^*$ ist.

4.6.1 Aufspaltung als Γ-Modul

Für konkrete Berechnungen ist der gesamte Funktor St natürlich zu kompliziert, aber wir zeigen, daß dieser Funktor in einfache Funktoren zerfällt; der Γ-Modul St ist eine Summe der Funktoren ψ_ℓ. Die ψ_ℓ sind die Quotientenfunktoren $\mathcal{B}_\ell/\mathcal{B}_{\ell-1}$, wie wir sie in 2.4 definiert haben. Diese Funktoren sind relativ übersichtlich, weil sie nur in einer Dimension Mischeffekte haben (vergleiche 2.5).

Wir werden die Homologie der Homotopiefasern der quadratischen Approximation für einige der ψ_ℓ für kleines ℓ berechnen. Zunächst zeigen wir, daß der Funktor $cr(St)$ ein zerfallender Funktor in der Kategorie der Ω-Moduln ist.

Theorem 4.6.1 *Der Funktor $St : \Gamma \longrightarrow \mathbb{F}_2$-Vektorräume zerfällt in die Funktoren ψ_i*

$$St \cong \bigoplus_{i \geq 0} \psi_i$$

Der Funktor ψ_0 ist dabei der unreduzierte konstante Funktor mit dem Wert $\mathbb{F}_2$ auf allen Objekten.

Um dieses Theorem zu beweisen, wechseln wir auf die Seite der Ω-Vektorräume, weil sich die Aufspaltung dort über die Mischeffekte ergibt.

Proposition 4.6.2 *Jede Abbildung $f : \underline{n} \to \underline{n-1}$ in Ω induziert die triviale Abbildung $f_* : St_n \to St_{n-1}$.*

Dabei ist $St_n := cr_n St([1], \ldots, [1])$.

Lemma 4.6.3 *Alle auftretenden Vektorräume von St_n sind eindimensional*

$$\dim_{\mathbb{F}_2} St_n = 1$$

Beweis
Wir werden induktiv zeigen, daß $cr_n St([1], \ldots, [1]) \cong \mathbb{F}_2$ und $cr_n St([1], \ldots, [1], [k]) \cong \mathbb{F}_2^{2^k-1}$. Der erste Mischeffekt von St berechnet sich über

$$St[0] \oplus cr_1 St[1] = St[1] = \mathbb{F}_2 \left\{ \overline{\mathbb{F}_2}[1] \right\},$$

daher $cr_1 St[1] \cong \mathbb{F}_2$ und

$$St[0] \oplus cr_1 St[2] \cong \mathbb{F}_2^4,$$

so daß $cr_1 St[2] \cong \mathbb{F}_2^3$. Aus der Definition des Mischeffektes von St erhalten wir

$$\begin{aligned} St_n &\cong cr_2(cr_{n-1} St([1], \ldots, [1], \_))([1], [1]) \\ &\cong \ker(cr_{n-1} St([1], \ldots, [1], [2]) \to St_{n-1} \times St_{n-1}) \\ &\cong \ker(\mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2) \\ &\cong \mathbb{F}_2 \end{aligned}$$

Den letzten Isomorphismus erhält man, weil die Abbildung, die den zweiten Mischeffekt definiert, surjektiv ist. Die zweite Behauptung sieht man ebenfalls leicht ein:

$$\begin{aligned} cr_n St([1], \dots, [k]) &\cong \ker(cr_{n-1}St([1], \dots, [1], [k+1]) \\ &\qquad \to St_{n-1} \times cr_{n-1}St([1], \dots, [1], [k])) \\ &\cong \ker(\mathbb{F}_2^{2^{k+1}-1} \to \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2^{2^k-1}) \\ &\cong \mathbb{F}_2^{2^k-1} \end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Beweis der Proposition

Da St_n nur eindimensional ist, müssen wir lediglich zeigen, daß das Basiselement trivial nach St_{n-1} abgebildet wird. Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\overline{\mathbb{F}}_2[n]$. Dann behaupten wir, daß das Element

$$E_n := (e_1 + \dots + e_n) + \sum_{i=1}^{n} (e_1 + \dots + \check{e}_i \dots + e_n) + \dots + (e_1) + \dots + (e_n)$$

eine Basis für St_n ist. Hierbei ist die innere Summe in $\mathbb{F}_2\{\underline{n}\}$ genommen, wohingegen die Summe außerhalb der Klammern in $\mathbb{F}_2\{\overline{\mathbb{F}}_2\{[n]\}\}$ gebildet wird. Wir benutzen die Beschreibung des n-ten Mischeffekts $cr_n St$ als

$$cr_n St = \bigcap_{i=1}^{n} \ker\left(r_{i_*} : St[n] \to St[n-1]\right)$$

Da E_n symmetrisch ist bezüglich der Operation der symmetrischen Gruppe, genügt es, die Gleichung $r_{n_*}(E_n) = 0$ nachzuweisen. Es bezeichne $(E_{n-1} + e_n)$ die Summe über alle Elemente in E_n, die das Basiselement e_n und einen weiteren Term von E_{n-1} enthalten. Es ist klar, daß wir E_n wie folgt zerlegen können:

$$E_n = (E_{n-1} + e_n) + E_{n-1} + (e_n)$$

Aber damit folgt sofort, daß $r_{n_*}(E_n) = E_{n-1} + E_{n-1} = 0$.

Sei nun $f : \underline{n} \to \underline{n-1}$ eine Abbildung in Ω. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $f(n) = f(n-1) = n-1$. Unter diesen Voraussetzungen ist dann aber $f_*(E_n) = 2E_{n-1} = 0$. □

Die Funktoren $cr(St)$ und $\bigoplus cr(\psi_i)$ haben dieselben Werte auf den Objekten von Ω und lassen beide nur triviale Transformationen zu. Mit der

Dold-Kan-Korrespondenz zwischen Γ-Moduln und Ω-Moduln erhalten wir deshalb eine entsprechende Zerlegung für St. Damit ist das Theorem 4.6.1 bewiesen. $\square$

Bemerkung 4.6.4 *Über den Umweg über Ω-Moduln kann man nun auch eine direkte Formel für die Spaltung von St angeben. Ein Element $\{i_1, \ldots, i_k\}$ aus $\psi_k[n]$ bildet man auf das Element*

$$(e_{i_1} + \ldots + e_{i_k}) + \sum_{j=1}^{k} (e_{i_1} + \ldots + \check{e}_{i_j} + \ldots + e_{i_k}) + \cdots + \sum_{j=1}^{k} (e_{i_j})$$

in $St[n]$ ab und weist nach, daß dies einen Isomorphismus von Funktoren definiert.

Bemerkung 4.6.5 *Für ungerade Primzahlen erhält man nicht eine so schöne Zerlegung: Der Mischeffekt-Funktor $cr(St)$ hat in diesen Fällen nichttriviale Morphismen. Zum Beispiel ist das Element $(e_1 + e_2) + 2(e_1) + 2(e_2)$ (in der obigen Notation) ein Element aus dem zweiten Mischeffekt des Steenrod-Funktors über $\mathbb{F}_3$, aber die Abbildung $f \in Mor(\Omega)$, die sowohl 1 als auch 2 auf 1 abbildet, ist auf diesem Element nicht trivial, sondern ergibt $(2e_1)+(e_1) \neq 0$.*

Eine eventuelle Zerlegung wäre also nicht so einfach zu handhaben und nicht so gut zu konkreten Berechnungen nützlich wie die Zerlegung für den Fall $p = 2$. Wir werden in 5.5 die obige Zerlegung benutzen, um die erste Homologie sämtlicher höheren kubischen Konstruktionen zu berechnen.

Als konkretes Beispiel berechnen wir nun die Homologie der Homotopiefaser der quadratischen Approximation des Funktors ψ_ℓ über einem Körper k, für $\ell = 2, 3, 4$.

4.6.2 $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^2, \psi_\ell), \quad \ell = 2, 3, 4$

a) Man sieht direkt aus der Definition der Spektralsequenz, daß $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^2, \psi_2)$ für alle $* > 0$ verschwindet, und man berechnet leicht, daß $\mathrm{Tor}_0^\Gamma(\theta^2, \psi_2) \cong k$.

b) $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^2, \psi_3)$
Die Hyperhomologiespektralsequenz für $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^2, \psi_3)$ ist

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\substack{n_1 > \ldots > n_p > 2 \\ \lambda \in \Pi(n_1, \cdots, n_p, 2)}} H_q(\Sigma_\lambda, (cr(\psi_3))(\underline{n}_1))$$

Aber $cr(\psi_3)(\underline{n}) = 0$ außer für $n = 3$. Daher besteht die Spektralsequenz nur aus den Termen E^1_{0q} und E^1_{1q}; alle anderen Terme sind trivial:

$$\begin{array}{cccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \bigoplus_{\lambda\in\Pi(3,2)} H_1(\Sigma_\lambda;k) & 0 & \ldots \\
0 & \bigoplus_{\lambda\in\Pi(3,2)} H_0(\Sigma_\lambda;k) & 0 & \ldots
\end{array}$$

Es gibt nur eine Partition $\lambda \in \Pi(3,2)$, nämlich $\lambda = (1,2)$, und für diese Partition erhalten wir $\Sigma_\lambda = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \cong \Sigma_2$. Sämtliche Differentiale sind trivial in diesem Fall; daher ist für alle n

$$\mathrm{Tor}^\Gamma_n(\theta^2, \psi_3) = E^1_{1,n-1} = H_{n-1}(\Sigma_2;k).$$

c) $\mathrm{Tor}^\Gamma_*(\theta^2, \psi_4)$
Aus Platzgründen verschweigen wir von nun an die Koeffizienten k. Ähnlich wie im vorigen Fall sieht man, daß der E^1-Term für $\mathrm{Tor}^\Gamma_*(\theta^2, \psi_4)$ nur aus den Summanden

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\substack{4=n_1>\ldots>n_p>2 \\ \lambda\in\Pi(n_1=4,\ldots,n_p,2)}} H_q(\Sigma_\lambda)$$

besteht. Das daraus resultierende E^1 ist

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & H_1(\Sigma_3)\oplus H_1(\Sigma_2\times\Sigma_2) & 3H_1(\Sigma_2) & 0 & \ldots \\
0 & H_0(\Sigma_3)\oplus H_0(\Sigma_2\times\Sigma_2) & 3H_0(\Sigma_2) & 0 & \ldots
\end{array}$$

Die Differentiale im E^1-Tableau kommen vom Differential des Komplexes $\mathcal{K}_*(cr(\theta^2))$. Eine Kopie von $H_*(\Sigma_2)$, die zu der 2-Partition $(1,3)$, $(1,1,2)$ gehört, wird horizontal auf den Summanden $H_*(\Sigma_3)$ abgebildet. Der Rand des anderen Summanden zur 2-Partition $(2,2)$, $(1,1,2)$ landet auf $H_*(\Sigma_2 \times \Sigma_2)$. Also bekommen wir als E^2-Term

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & H_1(\Sigma_3)/H_1(\Sigma_2)\oplus H_1(\Sigma_2\times\Sigma_2)/H_1(\Sigma_2) & H_1(\Sigma_2) & 0 \\
0 & H_0(\Sigma_3)/H_0(\Sigma_2)\oplus H_0(\Sigma_2\times\Sigma_2)/H_0(\Sigma_2) & H_0(\Sigma_2) & 0
\end{array}$$

Das nächste Differential kann nur in einer Spalte mit Nullen enden und daher ist $E^2 = E^\infty$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}^\Gamma_n(\theta^2, \psi_4) \quad \cong & \quad H_{n-2}(\Sigma_2;k) \oplus H_{n-1}(\Sigma_2\times\Sigma_2;k)/H_{n-1}(\Sigma_2;k) \\
\oplus & \quad H_{n-1}(\Sigma_3;k)/H_{n-1}(\Sigma_2;k)
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.6.6 *Ähnliche Ergebnisse erhält man für die Homologie der n-ten Homotopiefaser des Funktors ψ_m für $m = n, n+1, n+2$.*

4.6.3 Homologie einer teilgeordneten Menge von Partitionen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Zusammenhang unserer Spektralsequenz für die Tor-Gruppen $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^n, \psi_m)$ mit der Homologie einer gewissen teilgeordneten Menge von ungeordneten Partitionen. Diese Partitionen sind solche, die als Schichten von iterierten Partitionen vorkommen.

Sei Ξ eine p-Partition von n, d.h. Ξ ist eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ mit $1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_k$ und $\sum \lambda_i = n$ zusammen mit $(p-1)$-Partitionen der λ_i: $(\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^{n_i})$ (siehe auch 4.5.1 zur Erinnerung). Das Tupel $((\lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^{n_1})$ $, \ldots, (\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^{n_k}))$ ist keine Partition im strengen Sinn, weil es natürlich vorkommt, daß $\lambda_j^{n_j} \geq \lambda_{j+1}^1$.

Definition 4.6.7 *Ein ℓ-Tupel $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_\ell)$ natürlicher Zahlen ist eine* ungeordnete Partition von n *, falls $1 \leq a_i$ und $\sum a_i = n$. Dann heißt ℓ die* Länge *von $\underline{a}$.*

In einer p-Partition Ξ nennen wir $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ die erste Schicht der p-Partition; die zweite Schicht ist $((\lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^{n_1}), \ldots, (\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^{n_k}))$ und so fort. Eine p-Partition Ξ besteht also aus p Schichten ungeordneter Partitionen.

Definition 4.6.8 *Eine ungeordnete Partition λ von n heißt* gewachsen*, falls λ als Schicht einer p-Partition Ξ vorkommt.*

Beispiel
Die ungeordnete Partition $(1, 2, 1, 1, 2)$ ist gewachsen, weil sie als Schicht der 3-Partition $(3, 4), (1, 2, 4), (1, 2, 1, 1, 2)$ vorkommt. Ein typisches Beispiel für eine ungeordnete Partition, die nicht gewachsen ist, ist etwas von der Form $(n, 1)$ mit $n > 1$.

Definition 4.6.9 *Seien μ und ν zwei gewachsene Partitionen. Dann heißt ν eine* Verfeinerung *von μ, falls es eine p-Partition Ξ gibt, so daß ν eine höhere Schicht von Ξ ist als μ.*

Sei $\Pi(m,n)$ die Menge aller gewachsenen Partitionen von m, die aus einer gewöhnlichen Partition der Länge n hervorgegangen sind. Falls λ eine Verfeinerung von μ ist, notieren wir das als $\lambda < \mu$. Die Homologie der teilgeordneten Menge $\Pi(m,n)$ kann nun durch die Tor-Gruppen aus dem Taylorturm beschrieben werden.

Theorem 4.6.10

$$H_*(\Pi(m,n);\underline{\mathbb{Q}}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & *=0 \quad m=n \\ \mathbb{Q} & *=1 \quad m=n+1 \\ 0 & \mathit{sonst} \end{cases}$$

Hierbei ist $\underline{\mathbb{Q}}$ der konstante Funktor, der jeder ungeordneten Partition den Körper $\mathbb{Q}$ zuordnet.

Beweis

Die Spektralsequenz, die gegen $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^n, \psi_m)$ konvergiert, bricht über den rationalen Zahlen schon im E^2-Term ab. Der E^1-Term reduziert sich auf

$$E^1_{p,0} = \bigoplus_{\substack{n_1=m>n_2>\ldots>n_p>n \\ \Xi\in\Pi(m,n_2,\ldots,n_p,n)}} \mathbb{Q},$$

weil nur die nullten Homologiegruppen symmetrischer Gruppen als nichttriviale Einträge in der Spektralsequenz auftauchen.

Das Differential des E^1-Terms kommt vom Differential in $K_*(cr(\theta^n))$, also vergißt es gerade Schichten von iterierten Partitionen. Aber das ist genau dasselbe, was in dem Komplex für die Homologie der teilgeordneten Menge $\Pi(m,n)$ passiert; und eine p-Partition $\Xi \in \Pi(m,n_2,\ldots,n_p,n)$ ergibt einen p-Strang verknüpfbarer Morphismen in $\Pi(m,n)$. Daher stimmt der E^2-Term mit der Homologie des Posets $\Pi(m,n)$ überein; dies ist aber gleichzeitig der Wert für $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\theta^n,\psi_m)$ und diese Terme haben wir in 4.4 berechnet. □

Bemerkung 4.6.11 *Aus dem Beweis des Theorems folgt weiterhin, daß man für einen beliebigen Koeffizientenkörper k immer noch den E^2-Term als Homologie einer teilgeordneten Menge von Partitionen interpretieren kann. In diesem Fall sind die Koeffizienten aber mitnichten konstant, sondern werden in dem Funktor genommen, der eine Partition auf die Homologie der entsprechenden symmetrischen Gruppe abbildet:*

$$E^2_{p,q} \cong H_p(\Pi(m,n); H_q(\Sigma_{()}, k)).$$

Kapitel 5

Eigenschaften der höheren Q-Konstruktionen

5.1 Die höheren Q-Konstruktionen

Wenden wir die Taylorapproximation auf den Funktor $\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\} : \Gamma \to Ab$, $[n] \mapsto \mathbb{Z}\{\overline{A}\{[n]\}\}$ für eine abelsche Gruppe A an, so haben die Approximationsschritte $P_n\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$ ausgewertet an der Stelle [1] herausragende Eigenschaften.

In diesem Abschnitt werden wir einige Eigenschaften für die n-te Q-Konstruktion von A beweisen. Daß die kubischen Konstruktionen kommutativer Ringe eine E_∞-Algebrastruktur hat, zeigen wir in Kapitel 6. Wie schon im Abschnitt 3.1.2 und in Anlehnung an den linearen Fall $n = 1$ schreiben wir $Q_*^n(A)$ für $Q_*^n(\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\})$.

Ausgehend vom Taylorturm bekommen wir also einen Turm von kubischen Konstruktionen

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ Q_*^n(A) \\ \downarrow \\ Q_*^{n-1}(A) \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ Q_*^2(A) \\ \downarrow \\ Q_*^1(A) = Q_*(A) \end{array}$$

Für $A = \mathbb{F}_2$ ist die kubische Konstruktion $\mathbb{F}_2 \otimes Q_*(\mathbb{F}_2)$ ein Kettenmodell für das Duale der Steenrod Algebra $\mathfrak{A}(2)^*$, weil die mod-2-Homologie von $Q_*(\mathbb{F}_2)$ gerade $\mathfrak{A}(2)^*$ ergibt. Der obige Turm gibt also in diesem Fall einen Turm kubischer Konstruktionen über dem Kettenmodell von $\mathfrak{A}(2)^*$. Wir werden zeigen, daß die höheren Schichten in diesem Turm neben der E_∞-Struktur (siehe Theorem 6.4.4) noch weitere ähnliche Eigenschaften haben wie die einfache kubische Konstruktion. Die kubische Konstruktion trägt eine Operation der symmetrischen Gruppe auf zwei Elementen Σ_2. Die höheren kubischen

Konstruktionen Q_*^k tragen eine Operation der symmetrischen Gruppe auf $k+1$ Elementen Σ_{k+1}. Wir geben eine Operadenstruktur für die $Q_*^k(R)$ an, falls R ein kommutativer Ring mit Eins ist. Diese Operadenstruktur gibt den kubischen Konstruktionen die Struktur von Homotopie-Gerstenhaber-Algebren. Die Analogie zum Dualen der Steenrod-Algebra zeigt sich auch darin, daß die $Q_*^k(R)$ als Homologieoperationen für Funktoren mit homologischem Grad k fungieren.

Einige Eigenschaften der höheren Q-Konstruktionen lassen sich direkt vom linearen Fall $Q_*^1 = Q_*$ übertragen.

5.2 Dixmier-Produkte

Für zwei abelsche Gruppen A, B gibt es eine Dixmier Paarung für die gewöhnliche Eilenberg-MacLane Q-Konstruktion $Q_*(-) = Q_*^1(-)$

$$Q_*(A) \otimes Q_*(B) \to Q_*(A \otimes B)$$

Diese Paarung macht $Q_*(S)$ zu einem differentiell graduierten Ring für einen Ring S, wenn man obige Abbildung mit der Ringmultiplikation verlängert. Für die höheren Q-Konstruktionen gibt es ein ähnlich definiertes Produkt, welches zu multiplikativen Strukturen auf den $Q_*^n(S)$ führt.

Die Erzeuger von $Q_i^k(S)$ können als Funktionen von $[k]^i$ in die abelsche Gruppe S aufgefaßt werden. Wir definieren eine Paarung für zwei abelsche Gruppen A, B

$$Q_i^k(A) \otimes Q_j^k(B) \to Q_{i+j}^k(A \otimes B),$$

indem wir auf Erzeugern f aus $Q_i^k(A)$ und g aus $Q_j^k(B)$ festlegen, daß

$$(f \cdot g)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i+j}) := f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_i) \otimes g(\epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{i+j}).$$

Dabei bezeichnet $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i+j})$ ein Element aus $[k]^{i+j}$.

Proposition 5.2.1 *Für einen Ring S macht die obige Paarung die n-te Q-Konstruktion $Q_*^k(S)$ zu einem differentiell graduierten Ring.*

Beweis
Es ist leicht zu sehen, daß diese Abbildung wohldefiniert ist auf dem Quotienten der Normalisierung und daß diese Paarung mit den Randabbildungen

verträglich ist. Für einen Ring S setzen wir diese Abbildung mit der Ringmultiplikation μ fort und erhalten eine induzierte Ringstruktur.

$$Q_i^k(S) \otimes Q_j^k(S) \longrightarrow Q_{i+j}^k(S \otimes S) \xrightarrow{Q_*^k(\mu)} Q_{i+j}^k(S)$$

Der Randoperator in $Q_*^k(S)$ ist eine Derivation bezüglich dieses Produkts:

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g + (-1)^{|f|} f \cdot \delta(g).$$

□

5.3 Operadenstruktur

Proposition 5.3.1 *Für jeden kommutativen Ring R mit Eins hat jede höhere Q-Konstruktion $Q_*^k(R)$ die Struktur einer Operade. Dabei ist die n-te Komponente der Operade gleich Q_n^k.*

Beweis
Die Komposition in diesen Operaden definieren wir auf Erzeugern wie folgt. Für Erzeuger $f \in Q_n^k(R)$ und $g_i \in Q_{k_i}^k(R)$ ist f angewandt auf die g_i das Element

$$\begin{aligned}\gamma(f; g_1, \ldots, g_n)(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k_1+\cdots+k_n}) \\ := f(\epsilon_1, \epsilon_{k_1+1}, \ldots, \epsilon_{k_1+\cdots k_{n-1}+1}) \cdot g_1(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k_1}) \\ \cdots g_n(\epsilon_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1}, \ldots, \epsilon_{k_1+\cdots+k_n})\end{aligned}$$

Die Einheit in der Operade ist die Funktion $\mathbb{1} \in Q_1^k(R)$, die konstant gleich dem Einselement des Ringes ist. Die Operation der symmetrischen Gruppe permutiert die Funktionen wie in der Endomorphismenoperade.

Da die höheren Q-Konstruktionen ein assoziatives Produkt haben und weil sie für kommutative Ringe mit Eins R eine Operadenstruktur tragen, sind die $Q_*^k(R)$ Homotopie-Gerstenhaber Algebren im Sinne von [G-V, Theorem 3, S. 145]. Die Klammerprodukte auf $Q_*^k(R)$ sind über das Operadenprodukt gegeben. Ist f ein Erzeuger aus $Q_n^k(R)$ und ist g von beliebigem Grad, so ist die Klammer von f mit g definiert als

$$f\{g\} := \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(f; \mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1}, \underbrace{g}_{i+1}, \mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1}).$$

Aus der Homotopie-Gerstenhaber Struktur ergibt sich insbesondere ein zusätzliches Differential d auf $Q^k_*(R)$ (für $* > 0$) vom Grad $+1$. Dieses Differential berechnet sich über das Klammerprodukt mit der assoziativen Multiplikationsabbildung $m \in Q^k_2(R)$, die durch

$$m(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1 \quad \forall \quad \epsilon_i \in [k]$$

gegeben ist. Der Rand eines Elementes $f \in Q^k_l(R)$ ist nun

$$\begin{aligned}
&d(f)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l+1}) \\
&\quad = (m\{f\} - (-1)^{|f|} f\{m\})(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l+1}) \\
&\quad = f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_l) - f(\epsilon_2, \dots, \epsilon_{l+1}) - (-1)^{l+1} \textstyle\sum_{i=2}^{l+1} (-1)^i f(\epsilon_1, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_{l+1}) \\
&\quad = (-1)^l \textstyle\sum_{i=2}^{l} (-1)^i f(\epsilon_1, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_{l+1}) - f(\epsilon_2, \dots, \epsilon_{l+1}).
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.3.2 *Für zwei Elemente $f \in Q^k_l(R)$ und $g \in Q^k_m(R)$ ist der Grad von $f\{g\}$ gleich $l+m-1$. Insbesondere ist $f\{g\}$ ein $\cup_1$-Produkt bezüglich des Differentials d und nicht bezüglich des Standarddifferentials δ auf den kubischen Konstruktionen.*

Bemerkung 5.3.3 *Der Laplace-Operator, der sich aus den beiden Rändern auf Q^k_* ergibt*

$$d \circ \delta + \delta \circ d,$$

ist nicht trivial; insbesondere kann man das zusätzliche Differential nicht dazu benutzen, einen bigraduierten Komplex $(Q_*(R), \delta, d)$ zu bilden.

5.4 Operation der symmetrischen Gruppe

Wie wir schon im Abschnitt 3.1.5 gesehen haben, tragen die Approximationsstufen im Taylorturm $P_n F$ eine Operation der symmetrischen Gruppe auf $n+1$ Elementen. Insbesondere erhalten wir im Beispiel $F = \mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$ eine solche Operation auf den kubischen Konstruktionen $Q^n_*(A)$ für jede abelsche Gruppe A. Ein Erzeuger $f \in Q^n_k(A)$ wird dabei durch ein $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ abgebildet auf

$$\sigma(f)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = f(\sigma(\epsilon_1), \dots, \sigma(\epsilon_k)).$$

Bemerkung 5.4.1 *Es ist noch nicht klar, ob diese Operation trivial ist auf der Homologie oder nicht. Für den Fall $A = \mathbb{F}_2$ und $k = 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ könnte es sein, daß die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Operation gerade den Antiautomorphismus des Dualen der Steenrod-Algebra ergibt.*

Der Erzeuger der ersten Homologie, der dem Erzeuger ξ_1 aus dem Dualen der Steenrod-Algebra entspricht, ist in diesem Fall $(1,1) \in Q_1(\mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2$; dieser ist natürlich invariant unter der Σ_2-Operation. Die Frage ist, was mit den höheren ξ_i passiert.

5.5 Erste $\mathbb{F}_2$-Homologie der höheren Q-Konstruktionen

Im Fall der einfachen kubischen Konstruktion $Q_*(\mathbb{F}_2)$ hat die $\mathbb{F}_2$-Homologie im Grad 1 nur Rang 1 mit dem Erzeuger ξ_1. Man würde erwarten, daß die höheren Q-Konstruktionen zumindest Rang 1 haben. Mehr kann man nicht erwarten, weil die Erzeuger der Form $(1,\dots,1)$ mit $n+1$ Einträgen die einzigen nichttrivialen Elemente in $\mathbb{F}_2 \otimes Q_1^n(\mathbb{F}_2)$ sind. Es stellt sich heraus, daß der Rang der ersten Homologie im ganzen Turm konstant gleich 1 bleibt.

Die Zerfällung des Steenrod-Funktors in eine direkte Summe von einfachen Funktoren $St = \bigoplus_{k\geq 0} \psi_k$ ermöglicht es, die erste Homologie der höheren Q-Konstruktionen explizit zu berechnen. Die Struktur der Homologie im Grad Null ergibt sich als Nebenprodukt. Wir wissen, daß

$$H_*(Q^n(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, St) \cong \bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, \psi_k).$$

Für $k = 1$ verschwinden die Tor-Terme, weil $\psi_1 = L$ projektiv ist, mit $L = coker(\Gamma^0 \to \Gamma^1)$. Ebenso sind sämtliche $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(t^n, \psi_0)$ null, weil die Funktoren t^n reduziert sind. Zur Berechnung betrachten wir folgende kurze exakte Sequenz von Ω-Vektorräumen über $\mathbb{F}_2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \Omega_1 \xrightarrow{\pi} cr(t^n) \longrightarrow 0.$$

Für jedes $\underline{m} \in \Omega$ gibt es nur ein erzeugendes Element in $\Omega_1(\underline{m})$ und dieses bezeichnen wir mit f_m. Die Transformation π ist dann definiert als

$$\begin{aligned} \pi(\underline{m}) : \Omega_1(\underline{m}) &\longrightarrow \mathbb{F}_2 - \text{ Vekt} \\ \pi(\underline{m})(f_m) &:= \begin{cases} \{1,\dots,m\} & \text{falls } m \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Ω-Modul $\mathcal{K}$ ist der Kern dieser Transformation. Aus dieser kurzen exakten Sequenz erhalten wir die übliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Omega}(\Omega_1, cr(\psi_k)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Omega}(cr(t^n), cr(\psi_k)) \longrightarrow \mathcal{K} \otimes_\Omega cr(\psi_k) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \Omega_1 \otimes_\Omega cr(\psi_k) \longrightarrow cr(t^n) \otimes_\Omega cr(\psi_k) \to 0.$$

Da Ω_1 projektiv ist, verschwindet der erste Tor-Term dieser Sequenz. Für die Untersuchung der Tensorprodukte am Ende der Sequenz benutzen wir folgendes Lemma:

Lemma 5.5.1 *Sei $F \in Vekt^{\Omega^{op}}$ und sei $k > 1$. Operiert jedes $g \in \Omega(\underline{k}, \underline{k-1})$ surjektiv auf F, so verschwindet $F \otimes_\Omega cr(\psi_k)$.*

Beweis
Das Tensorprodukt $F \otimes_\Omega cr(\psi_k)$ besteht lediglich aus einem Quotienten des Summanden $F(\underline{k}) \otimes cr_k(\psi_k)$. Wegen der Surjektivität der Operation ist jedes Element $y \otimes \{1, \ldots, k\}$ daraus von der Form $g^*(x) \otimes \{1, \ldots, k\}$ und dies ist äquivalent zu $x \otimes g_*\{1, \ldots, k\} = 0$.

□

Korollar 5.5.2

$$t^n \otimes_\Gamma \psi_k = 0 \quad \textit{für} \quad k > 1.$$

Beweis
Die Behauptung ergibt sich daraus, daß der k-te Mischeffekt von t^n frei erzeugt ist von der Menge $\{1, \ldots, k\}$. Die Morphismen aus Ω operieren auf einem Erzeuger S mit $S \neq \emptyset$ und $|S| \leq n$ durch das Nehmen der Urbilder, also surjektiv.

□

Ebenso ergibt sich aus dem Lemma, daß das Tensorprodukt $\Omega_1 \otimes_\Omega cr(\psi_k)$ verschwindet:

Korollar 5.5.3

$$\Omega_1 \otimes_\Omega cr(\psi_k) \cong 0.$$

Bemerkung 5.5.4 *Als direkte Konsequenz ergibt sich, daß nur der Summand ψ_1 zur nullten Homologie der kubischen Konstruktion über $\mathbb{F}_2$ beiträgt:*

$$H_0(Q_*^n(F_2), \mathbb{F}_2) \cong t^n \otimes_\Gamma \psi_1 \cong \mathbb{F}_2.$$

Für die erste Homologie von $Q_*^n(\mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2$ erhält man nun:

Satz 5.5.5

$$Tor_1^\Gamma(t^n, \psi_k) \cong \begin{cases} 0 & , \quad k \leq n \\ \mathbb{F}_2 & , \quad k = n+1 \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

Damit folgt, daß $H_1(Q^n_*(\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Tor}_1^\Gamma(t^n, \psi_{n+1}) \cong \mathbb{F}_2$ ist.

Beweis
Aus der langen exakten Sequenz wissen wir, daß

$$\mathrm{Tor}_1^\Gamma(t^n, \psi_k) \cong \mathcal{K} \otimes_\Omega cr(\psi_k)$$

ist. Der Ω-Vektorraum $\mathcal{K}$ nimmt nur oberhalb von n nichttriviale Werte an:

$$\mathcal{K}(\underline{m}) = \begin{cases} \Omega_1(\underline{m}) & \text{falls} \quad m > n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $k = n+1$ erhalten wir als Wert für das Tensorprodukt $\mathbb{F}_2$, weil nur der Erzeuger $f_{n+1} \otimes \{1, \ldots, n+1\}$ vorkommt und keine Relationen auftreten. Anders ist die Situation dagegen für $k \neq n+1$: Ist $k \leq n$, so ist das Tensorprodukt Null, weil $\mathcal{K}(\underline{k})$ in diesem Fall verschwindet. Für $k > n+1$ ist der einzige nichttriviale Erzeuger $f_k \otimes \{1, \ldots, k\}$. Aber f_k läßt sich immer als Bild des Elementes f_{n+1} schreiben. Sei $g \in \Omega(\underline{k}, \underline{n+1})$ eine beliebige Surjektion. Wir erhalten

$$f_k \otimes \{1, \ldots, k\} = g^*(f_{n+1}) \otimes \{1, \ldots, k\} \sim f_{n+1} \otimes g_*(\{1, \ldots, k\}) = 0$$

und damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.5.6 *Die Abbildungen q_n aus dem Taylorturm von $Q^n_*(\mathbb{F}_2)$ nach $Q^{n-1}_*(\mathbb{F}_2)$ induzieren in der Homologie mit $\mathbb{F}_2$-Koeffizienten triviale Abbildungen. Das einzige nichttriviale Element $(1, \ldots, 1)$ in $\mathbb{F}_2 \otimes Q^n_1(\mathbb{F}_2)$ wird auf $2 \cdot (1, \ldots, 1) + (1, \ldots, 1, 0)$ in $\mathbb{F}_2 \otimes Q^{n-1}_1(\mathbb{F}_2)$ abgebildet, also auf die Null.*

5.6 Die $Q^n_*(R)$ als Homologieoperationen

Ein weiterer Grund, warum man die Homologie der höheren Q-Konstruktionen als Verallgemeinerung des Dualen der Steenrod-Algebra auffassen kann, liegt in ihrer Interpretation als Homologieoperationen. Wenn $K(R, n)$ einen simplizialen Eilenberg-MacLane-Raum bezeichnet und $R\{K(R, n)\}$ den freien simplizialen R-Modul darauf abkürzt, so hat Bousfield in [B] gezeigt, daß die Homotopie von $R\{K(R,n)\}$ auf der Homotopie von TX operiert, wenn T ein Endofunktor von R-Moduln und X ein simplizialer R-Modul ist. Im neunten Abschnitt seiner Arbeit befaßt sich Bousfield mit stabilen Operationen („stable pensions“), die auf den stabilen abgeleiteten Funktoren $L_*^{st}T$ operieren. Diese stabilen Operationen stammen aus der stabilen Homologie der Eilenberg-MacLane-Räume.

Wir möchten diese Operationen insofern verallgemeinern, daß wir nicht nur die stabile Homologie der Eilenberg-MacLane Räume operieren lassen - also die Homologie der kubischen Konstruktion - sondern daß wir ebenso die Homologie der höheren kubischen Konstruktion als Homologieoperationen zum einen auf der Homologie der höheren kubischen Konsruktionen von Funktoren und zum anderen auf der Homologie von Funktoren mit homologischem Grad n benutzen.

Satz 5.6.1 *Die Homologie der n-ten kubischen Konstruktion $H_*Q_*^n(R)$ operiert auf der Homologie der n-ten Q-Konstruktion eines Endofunktors von R-Moduln F'.*

Bemerkung 5.6.2 *Die kubische Konstruktion eines Endofunktors von R-Moduln F' setzen wir hierbei als die Q-Konstruktion des zusammengesetzten Funktors $F' \circ L$.*

Beweis
Jeder Erzeuger f aus $Q_l^n(R)$ liefert eine Abbildung von $R[n]^k$ nach $R[n]^{l+k}$

$$\hat{f} : R[n]^k \to R[n]^{l+k},$$

indem ein $g \in R[n]^k$ auf das Element $f(g)$ abgebildet wird, das auf den Tupeln $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{l+k})$ aus $[n]^{k+l}$ den folgenden Wert annimmt:

$$f(g)(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{l+k}) := f(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l) \cdot g(\epsilon_{l+1}, \ldots, \epsilon_{l+k}).$$

Wenden wir den Funktor F' auf die Abbildung $\hat{f}$ an, so bekommen wir

$$F'(\hat{f}) : F'(L(\bigvee_{[n]^k}[1])) \cong F'(R[n]^k) \to F'(R[n]^{l+k}).$$

Diese Abbildung setzen wir linear auf ganz Q_*^n fort und erhalten die Paarung

$$Q_*^n(R) \otimes Q_*^n(F' \circ L) \to Q_*^n(F' \circ L).$$

Über

$$H_*Q_*^n(R) \otimes H_*Q_*^n F \to H_*(Q_*^n(R) \otimes Q_*^n F)$$

ergibt sich die gewünschte Operation. $\square$

Korollar 5.6.3 *Ist F' ein Funktor von R-Moduln in die Kategorie der Kettenkomplexe über R, so operiert die Homologie der n-ten kubischen Konstruktion $H_*Q_*^n(R)$ auf der Homologie des Funktors $F = F' \circ L$ an der Stelle* [1]*, sobald F homologisch vom Grad n ist.*

Beweis
Ist F homologisch vom Grad n, so ist die natürliche Abbildung $F \to P_n F$ eine schwache Äquivalenz. Daher ist die Homologie von F an der Stelle [1] gleich der Homologie der n-ten kubischen Konstruktion von F

$$H_*F[1] \cong H_*(Q_*^n(F)).$$

Mit dem obigen Satz erhalten wir die Behauptung. $\square$

Kapitel 6

E_∞-Struktur für die Eilenberg-MacLane Konstruktionen $Q_*^n(R)$

6.1 Beweisübersicht

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß sämtliche Q-Konstruktionen $Q^n_*(R)$ E_∞-Algebren liefern, wenn der Ring R kommutativ ist. Anstatt den Beweis für alle Stufen n gleichzeitig zu führen, werden wir zunächst den Fall der linearen Approximation behandeln und im Anschluß anführen, welche Modifikationen im Beweis zu berücksichtigen sind, um den allgemeinen Fall zu zeigen. Wir hoffen, daß durch diese Vorgehensweise der Beweis übersichtlicher wird; zumindest die Notation vereinfacht sich dadurch. Der Fall $n = 1$ ist von besonderer Bedeutung, weil sich durch die E_∞-Struktur auf $Q_*(R)$ eventuell Homologieoperationen für MacLane-Homologie ergeben.

Bevor wir den eigentlichen Beweis bringen, führen wir zunächst den Begriff eines „E_∞-monoidalen Funktors“ ein, um zu zeigen, daß das Analoge der Q-Konstruktionen auf Mengenniveau SQ^n_* ein solcher Funktor ist. Danach kann man die E_∞-Eigenschaft mittels Kan-Erweiterungen zur algebraischen Q-Konstruktion transferieren. Dieser Abschnitt stimmt bis auf die Erweiterung der E_∞-Struktur auf die höheren kubischen Konstruktionen weitestgehend mit dem Artikel [Ri] überein.

6.2 E_∞-monoidale Funktoren

Ziel dieses Teils der Arbeit ist es, den Begriff eines E_∞-monoidalen Funktors zwischen monoidalen Kategorien einzuführen. Da in unserem Zusammenhang die Operaden für die E_∞-Strukturen aus Kettenkomplexen abelscher Gruppen bestehen werden, fordern wir zusätzlich eine Operation der Kategorie $Ch(Ab)$ der nichtnegativen Kettenkomplexe auf unseren monoidalen Kategorien.

Die Kategorie $Ch(Ab)$ ist eine symmetrisch monoidale Kategorie mit dem üblichen Tensorprodukt von Komplexen. Sei $\underline{B}$ eine abelsche Kategorie, die angereichert ist über $Ch(Ab)$ und die zusätzlich tensoriert und kotensoriert ist über $Ch(Ab)$ (siehe [Du] p. xiii für die Begrifflichkeit), d.h. für alle Objekte $X, Y, Z \in \underline{B}$ gibt es einen Kettenkomplex $\mathcal{H}om_{\underline{B}}(X, Y)$, eine Abbildung von Kettenkomplexen

$$\mathcal{H}om_{\underline{B}}(Y, Z) \otimes \mathcal{H}om_{\underline{B}}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\underline{B}}(X, Z)$$

und für jedes X gibt es ein ausgezeichnetes Element in $(\mathcal{H}om_{\underline{B}}(X, X))_0$, die Einheit. Ist $\underline{B}$ tensoriert und kotensoriert über $Ch(Ab)$, so gibt es die Objekte

$A_* \otimes X$ und $hom(A_*, X)$ in $\underline{B}$ für jeden Kettenkomplex A_* und jedes Objekt X in $\underline{B}$. Diese beiden Zusatzstrukturen erfüllen die naheliegenden natürlichen Bedingungen ([Du] pp.18-22).

Im Weiteren werden wir eine „abelsche Kategorie, die angereichert, tensoriert und kotensoriert ist über *Ch*(*Ab*)" einfach als „*Ch*(*Ab*)-Kategorie" bezeichnen.

Sei $(\underline{B}, \square)$ eine symmetrisch monoidale abelsche $Ch(Ab)$-Kategorie.

Definition 6.2.1 *Die Operation von* $Ch(Ab)$ *auf* $\underline{B}$ *heißt* kompatibel*, wenn sie zu der monoidalen Struktur in* $\underline{B}$ *paßt, d.h. falls es natürliche Isomorphismen gibt*

$$A_* \otimes (X \square Y) \cong (A_* \otimes X) \square Y,$$

die sich mit der monoidalen Struktur in $Ch(Ab)$ *und* $\underline{B}$ *vertragen.*

Seien nun $(\underline{A}, \triangle)$ und $(\underline{B}, \square)$ zwei symmetrisch monoidale Kategorien.

Definition 6.2.2 *Ein Funktor* $T : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *ist ein* schwach monoidaler Funktor*, falls es natürliche Abbildungen*

$$T(A_1) \square T(A_2) \longrightarrow T(A_1 \triangle A_2)$$

gibt, welche die üblichen Kohärenzbedingungen für die Assoziativität und die Einheiten in den beiden Kategorien erfüllen (vergleiche [T] §1 und die Referenzen, die wiederum dort angegeben sind).

Falls ein Funktor $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *mit natürlichen Abbildungen*

$$F(A_1 \triangle A_2) \longrightarrow F(A_1) \square F(A_2)$$

versehen ist, welche die dualen Eigenschaften haben, so heißt F *ein* schwach komonoidaler Funktor.

Bemerkung 6.2.3 *Ein schwach monoidaler Funktor bildet Monoide in* $\underline{A}$ *auf Monoide in* $\underline{B}$ *ab, und das Bild eines Komonoids unter einem schwach komonoidalen Funktor ist wieder ein Komonoid. Sind beide Kategorien zusätzlich symmetrisch, muß das Bild eines kommutativen (Ko-)Monoids aber keineswegs kommutativ sein. Kommutativität bleibt nur erhalten, falls man außerdem verlangt, daß der Funktor symmetrisch ist, d.h. daß das folgende*

Diagramm für alle Objekte in $\underline{A}$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T(A_1)\Box T(A_2) \arrow[r] \arrow[d] & T(A_1\triangle A_2) \arrow[d] \\ T(A_2)\Box T(A_1) \arrow[r] & T(A_2\triangle A_1) \end{tikzcd}$$

In unserer Situation treten Funktoren auf, die nicht symmetrisch sind, die aber immerhin eine E_∞-Bedingung erfüllen.

Definition 6.2.4 *Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zwei Ch(Ab)-Kategorien.*
Ein Funktor $T : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ist ein Ch(Ab)-Funktor*, falls es natürliche Isomorphismen*

$$\zeta_{C,X} : C_* \otimes T(X) \cong T(C_* \otimes X) \qquad \forall C_* \in Ch(Ab) \qquad \forall X \in \underline{A}$$

gibt, welche die Kompatibilitätsbedingungen bezüglich der symmetrisch monoidalen Struktur in Ch(Ab) erfüllen.

Im Weiteren benutzen wir die Standardnotationen und die allgemein bekannten Tatsachen über Operaden, wie man sie z.B. in [K-M], Teil I., nachlesen kann. Das Wort „Operade" steht insbesondere für eine Operade *mit* einer Operation der symmetrischen Gruppen. Eine Operade $\mathcal{P}$ heißt E_∞-Operade, falls sie über die Augmentation schwach äquivalent ist zu der Operade für kommutative Algebren und falls ihre Operation der symmetrischen Gruppen frei ist, d.h. jedes $\mathcal{P}_n$ ist frei über der Gruppenalgebra $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$.

Bemerkung 6.2.5 *Im Folgenden treten einige Diagramme auf, in denen wir eigentlich Klammern setzen müßten, weil wir nicht verlangen, daß unsere monoidalen Kategorien strikt sind. Da aber jede symmetrisch monoidale Kategorie äquivalent ist zu einer strikten (siehe [ML], XI, 3), werden wir auf Klammerungen verzichten.*

Definition 6.2.6 *Seien $(\underline{A}, \triangle)$ und $(\underline{B}, \Box)$ zwei symmetrisch monoidale Kategorien, und sei $\underline{B}$ außerdem abelsch mit einer kompatiblem Ch(Ab)-Operation.*
Ein Funktor $T : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ heißt E_∞-monoidaler Funktor*, falls eine E_∞-Operade O aus Ch(Ab) existiert und falls es natürliche Abbildungen*

$$O(n) \otimes (T(A_1) \square \ldots \square T(A_n)) \xrightarrow{\gamma} T(A_1 \triangle \ldots \triangle A_n)$$

gibt, welche die Axiome für eine Operation einer Operade auf einer Algebra erfüllen (vergleiche [K-M], p.14), nämlich:
1) Die Einheit der Operade verträgt sich mit der Einheit des Tensorprodukts:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \otimes T(A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & T(A) \\
O(1) \otimes T(A) \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

2) Die Operade operiert äquivariant:

$$\begin{tikzcd}
O(n) \otimes (T(A_1) \square \cdots \square T(A_n)) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\sigma."] & T(A_1 \triangle \ldots \triangle A_n) \arrow[d, "\sigma."] \\
O(n) \otimes (T(A_{\sigma^{-1}(1)}) \square \cdots \square T(A_{\sigma^{-1}(n)})) \arrow[r, "\gamma"] & T(A_{\sigma^{-1}(1)} \triangle \ldots \triangle A_{\sigma^{-1}(n)})
\end{tikzcd}$$

3) Das folgende Assoziativitätsdiagramm kommutiert für $\sum_{i=1}^{n} j_i = j$ und $\sum_{i=1}^{n-1} j_i + 1 = j'$:

$$\begin{tikzcd}
(O(n) \otimes (O(j_1) \otimes \cdots \otimes O(j_n))) \otimes (T(A_1) \square \cdots \square T(A_j)) \arrow[r] \arrow[d] & O(j) \otimes (T(A_1) \square \cdots \square T(A_j)) \arrow[dd] \\
O(n) \otimes ((O(j_1) \otimes (T(A_1) \square \cdots \square T(A_{j_1}))) \square \cdots \square (O(j_n) \otimes (T(A_{j'}) \square \cdots \square T(A_j)))) \arrow[d] & \\
O(n) \otimes (T(A_1 \triangle \ldots \triangle A_{j_1}) \square \cdots \square T(A_{j'} \triangle \ldots \triangle A_j)) \arrow[r] & T(A_1 \triangle \ldots \triangle A_j)
\end{tikzcd}$$

Lemma 6.2.7 *Ist nun $T : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein E_∞-monoidaler Funktor und ist M ein kommutatives Monoid in $\underline{A}$. Dann ist $T(M)$ ein E_∞-Monoid in $\underline{B}$. Das bedeutet, daß es eine Operation gibt*

$$O(n) \otimes (T(M) \square \cdots \square T(M)) \xrightarrow{\gamma} T(M),$$

welche nun die herkömmlichen Axiome für eine Operadenoperation erfüllt.

Beweis
Die Einschränkung der Operation auf das Bild von M ergibt eine Abbildung

$$O(n) \otimes (T(M) \square \cdots \square T(M)) \longrightarrow T(M \triangle \cdots \triangle M).$$

Setzt man diese Abbildung mit der Monoidabbildung von M fort

$$M \triangle \cdots \triangle M \xrightarrow{\mu} M,$$

so erhält man

$$O(n) \otimes (T(M) \square \cdots \square T(M)) \longrightarrow T(M).$$

Die Assoziativität und die Bedingung an die Einheit bekommt man direkt aus den Operadenaxiomen und den Eigenschaften der Verknüpfung in M. Die Kommutativität des Monoids führt dazu, daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
O(n) \otimes (T(M) \square \cdots \square T(M)) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma \otimes \sigma^{-1}"] & T(M \triangle \ldots \triangle M) \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr] & \\
O(n) \otimes (T(M) \square \cdots \square T(M)) \arrow[r] & T(M \triangle \ldots \triangle M) \arrow[r] & T(M)
\end{tikzcd}$$

Dies liefert die Behauptung. $\square$

Die duale Situation gibt uns den Begriff eines E_∞-*komonoidalen Funktors*: Ein Funktor F zwischen zwei symmetrisch monoidalen Kategorien mit einer kompatiblen $Ch(Ab)$-Operation ist ein E_∞-komonoidaler Funktor, falls es eine E_∞-Operade P gibt, die auf dem Bild von F in der folgenden Weise operiert: Es gibt natürliche Abbildungen

$$P(n) \otimes F(A_1 \triangle \ldots \triangle A_n) \longrightarrow F(A_1) \square \cdots \square F(A_n),$$

welche die dualen Axiome einer Operadenoperation erfüllt; lediglich das Assoziativgesetz bedarf vielleicht einer Erläuterung:

Für die Assoziativität muß folgendes Diagramm kommutieren (wieder sei $\sum_{i=1}^{n} j_i = j$ und $\sum_{i=1}^{n-1} j_i + 1 = j'$):

$$\begin{tikzcd}
(P(j_1) \otimes F(A_1 \triangle \ldots \triangle A_{j_1})) \square \cdots \square (P(j_n) \otimes F(A_{j'} \triangle \ldots \triangle A_j)) \arrow[r] \arrow[d] & P(j) \otimes F(A_1 \triangle \ldots \triangle A_j) \arrow[d] \\
(P(n) \otimes P(j_1) \otimes \cdots \otimes P(j_n)) \otimes F(A_1 \triangle \ldots \triangle A_j) \arrow[r] & F(A_1) \square \cdots \square F(A_j)
\end{tikzcd}$$

Für den linken vertikalen Pfeil benutzen wir dabei zum einen die Operation von $P(n)$ und die Shuffle-Abbildung, um das Bild des Produktes aufzuspalten.

Bemerkung 6.2.8 *In unseren Anwendungen werden unsere Funktoren bereits schwach (ko)monoidal sein, aber für die Definition eines E_∞-(ko)monoidalen Funktors ist diese Annahme nicht nötig.*

6.3 SQ_* als ein E_∞-monoidaler Funktor

Um zu beweisen, daß $Q_*(R)$ für jeden kommutativen Ring R eine E_∞-Algebra ist, werden wir zunächst zeigen, daß der Funktor SQ_* ein E_∞-monoidaler Funktor ist. Dieser Funktor hat viel schönere Eigenschaften als $Q_*(-)$ selbst; z.B. ist $SQ_* \longrightarrow t$ eine projektive Auflösung in der Kategorie aller kontravarianter Funktoren von der Kategorie Γ der endlichen punktierten Mengen in die Kategorie der abelschen Gruppen (siehe [P1], §5 oder [Lo], 13.2). Über die linken Kan-Erweiterungen von t können wir die E_∞-Struktur von SQ_* auf Q_* übertragen.

6.3.1 Eine E_∞-Operade für SQ_*

Das Ziel des nächsten Abschnitts ist zu zeigen, daß $SQ_* : (\Gamma^{op}, \wedge) \longrightarrow (Ch(Ab), \otimes)$ ein E_∞-monoidaler Funktor ist.

Zur Konstruktion einer geeigneten Operade benötigen wir die Funktoren $SQ_*^{\boxtimes n}$ und $SQ_*^{\wedge n}$ von $\Gamma^{op} \times \ldots \times \Gamma^{op}$ nach Ab, die durch

$$\begin{array}{rcl} SQ_*^{\boxtimes n}(S_1, \ldots, S_n) & = & SQ_*(S_1) \otimes \cdots \otimes SQ_*(S_n) \\ SQ_*^{\wedge n}(S_1, \ldots, S_n) & = & SQ_*(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n) \end{array}$$

gegeben sind. Die Operade, die auf SQ_* operieren soll, wird aus dem Homomorphismenkomplex für Kettenkomplexe hergestellt. Für beliebige Kettenkomplexe A_* und B_* ist dieser Morphismenkomplex

$$\mathcal{H}om_j(A_*, B_*) := \prod_{k \in \mathbb{Z}} Hom(A_k, B_{k+j}) \qquad j \in \mathbb{Z}$$

Das Differential d ist komponentenweise definiert und zwar als

$$(df)_i := f_{i-1} \circ \delta + (-1)^{j+1} \delta' \circ f_i \quad \forall f \in \mathcal{H}om_j(A_*, B_*)$$

Wir bezeichnen die Kategorie der Funktoren von $\Gamma^{op} \times \ldots \times \Gamma^{op}$ nach Ab mit $\mathcal{F}_n$. Nun können wir die Operade definieren, die auf $SQ_*^{\boxtimes n}$ operieren soll. Wir setzen

$$O_{SQ_*}(n) := \mathcal{H}om_{\mathcal{F}_n}(SQ_*^{\boxtimes n}, SQ_*^{\wedge n})$$

Jedes O_{SQ_*} besteht also aus Kettenkomplexen abelscher Gruppen und diese sind dimensionsweise frei. Die Verknüpfung in dieser Operade ist einfach über die Komposition definiert: Es sei f aus $O_{SQ_*}(n)$ und es seien die g_i Elemente aus $O_{SQ_*}(k_i)$ mit $\sum_{i=1}^n k_i = n$. Dann ist das Operadenprodukt definiert als

$$\gamma(f, g_1, \ldots, g_n) := f \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_n).$$

Die symmetrische Gruppe operiert folgendermaßen: Für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$, für jede natürliche Transformation f in $O_{SQ_*}(n)$ und für jedes n-Tupel $S_1, \ldots, S_n$ endlicher punktierter Mengen sei $f.\sigma$ die natürliche Transformation die über folgendes Diagramm definiert ist:

$$\begin{tikzcd}
SQ_*(S_1) \otimes \cdots \otimes SQ_*(S_n) \arrow[r, "f.\sigma"] \arrow[d, "\sigma"] & SQ_*(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n) \\
SQ_*(S_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes SQ_*(S_{\sigma^{-1}(n)}) \arrow[r, "f"] & SQ_*(S_{\sigma^{-1}(1)} \wedge \ldots \wedge S_{\sigma^{-1}(n)}) \arrow[u, "SQ_*(\sigma^{-1})"']
\end{tikzcd}$$

Per definitionem haben wir natürliche Transformationen

$$O_{SQ_*}(n) \otimes (SQ_*(S_1) \otimes \cdots \otimes SQ_*(S_n)) \longrightarrow SQ_*(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n),$$

welche die gewünschten Axiome für eine Operadenoperation erfüllen.

Weiterhin setzen wir $t^{\wedge n}$ und $t^{\boxtimes n}$ analog fest. Die Homologie von O_{SQ_*} ist dann

Lemma 6.3.1

$$H_i(O_{SQ_*}(n)) = \begin{cases} 0 & : \quad i > 0 \\ Ext^{-i}_{\mathcal{F}_n}(t^{\boxtimes n}, t^{\wedge n}) & : \quad i \leq 0 \end{cases}$$

Beweis

Da $SQ_* \to t$ eine projektive Auflösung ist, sind $SQ^{\boxtimes n} \to t^{\boxtimes n}$ und $SQ_*^{\wedge n} \to t^{\wedge n}$ ebenfalls Auflösungen in $\mathcal{F}_n$. Weiterhin ist $SQ^{\boxtimes n} \to t^{\boxtimes n}$ eine projektive Auflösung, weil das externe Tensorprodukt $\boxtimes$ zweier Standardprojektiver wieder projektiv ist (siehe den Beweis zu 6.4). Daher ist

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{F}_n}(SQ_*^{\boxtimes n}, SQ_*^{\wedge n}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{F}_n}(SQ_*^{\boxtimes n}, t^{\wedge n})$$

eine schwache Äquivalenz und wir bekommen das gewünschte Ergebnis für die Homologie. $\square$

Offensichtlich ist $Hom_{\mathcal{F}_n}(t^{\boxtimes n}, t^{\wedge n})$ ebenfalls eine Operade. Indem wir den Kettenkomplex $\mathcal{H}om_{\mathcal{F}_n}(SQ_*^{\boxtimes n}, SQ_*^{\wedge n})$ in negativen Graden abtrennen und bloß die nicht-negativen Grade übrigbehalten, bekommen wir eine Abbildung nach $Hom_{\mathcal{F}_n}(t^{\boxtimes n}, t^{\wedge n})$ über die Augmentation.

Für einen beliebigen Kettenkomplex C_* setzen wir den abgeschnittenen Komplex

$$\tau(C)_k := \begin{cases} 0 & : \quad k < 0 \\ C_k & : \quad k > 0 \\ \text{Zykel}(C_0) & : \quad k = 0. \end{cases}$$

Es gibt Abbildungen

$$\tau(C)_* \otimes \tau(C')_* \longrightarrow \tau(C \otimes C')_*$$

für Kettenkomplexe C_* und C'_*, die assoziativ und kommutativ sind. Daher ist für jede Operade P der abgeschnittene Komplex $\tau(P)$ wieder eine Operade. Die Operade $\tau(O_{SQ_*})$ hat eine natürliche Inklusion $\tau(O_{SQ_*}) \hookrightarrow O_{SQ*}$, so daß $\tau(O_{SQ_*})$ immer noch auf SQ_* operiert. Da $\tau(O_{SQ_*})$ nur aus Zykeln im Grad null besteht, erhalten wir eine Projektionsabbildung

$$\tau(O_{SQ_*})_0 \twoheadrightarrow Hom_{\mathcal{F}_n}(t^{\boxtimes n}, t^{\wedge n})$$

Wir definieren die Operade $O_t(n)$ als

$$O_t(n) = Hom_{\mathcal{F}_n}(t^{\boxtimes n}, t^{\wedge n}).$$

Die Verknüpfung und die Operation der symmetrischen Gruppe sind in der gleichen Art und Weise definiert wie für O_{SQ_*}.

Der entscheidende Punkt ist, daß wir eine Abbildung von der Operade *Com* für kommutative Algebren nach O_t finden. In $Hom_{\mathcal{F}_n}(t^{\boxtimes n}, t^{\wedge n})$ haben wir eine Multiplikationsabbildung

$$m(t(S_1) \otimes \cdots \otimes t(S_n)) = t(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n),$$

die mit der Operation der symmetrischen Gruppe auf O_t kommutiert. Für $n = 2$ bildet m ein erzeugendes Element $x \otimes y$ aus $t(X_+) \otimes t(Y_+)$ auf die

Äquivalenzklasse von (x,y) in $t(X_+ \wedge Y_+) \cong t((X \times Y)_+)$ ab. Für diese Abbildung gilt

$$(m.\sigma)(t(S_1) \otimes \cdots \otimes t(S_n)) = t(\sigma^{-1}).m(t(S_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes t(S_{\sigma^{-1}(n)}))$$
$$= t(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n) = m(t(S_1) \otimes \cdots \otimes t(S_n))$$

Indem wir die Eins $1 \in \mathbb{Z} = Com(n)$ auf diese Multiplikation m schicken, erhalten wir einen Morphismus von Operaden von Com nach O_t.

Insbesondere erhalten wir das folgende Diagramm von Kettenkomplexen abelscher Gruppen:

$$\begin{tikzcd} O(n) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \tau(O_{SQ_*})(n) \arrow[d, "\sim"] \\ Com(n) \arrow[r] & O_t(n) \end{tikzcd}$$

Der gradweise gebildete Pullback $O(n)$ bildet wieder eine Operade; dies folgt direkt aus der universellen Eigenschaft des Pullbacks.

Da die Abbildung von $\tau(O_{SQ_*})$ nach O_t surjektiv ist und weil sie nach Lemma 6.3.1 ein quasi-Isomorphismus ist, ist der linke vertikale Pfeil auch ein quasi-Isomorphismus; also ist auch die neue Operade O azyklisch:

$$H_i(O(n)) = \begin{cases} 0 & : \quad i \neq 0 \\ \mathbb{Z} & : \quad i = 0. \end{cases}$$

Außerdem operiert diese Operade über die induzierte Abbildung aus dem Pullback auf $SQ_*^{\boxtimes n}$. Damit erhalten wir folgendes Theorem:

Theorem 6.3.2 *Der schwach monoidale Funktor SQ_* von der symmetrisch monoidalen Kategorie $(\Gamma^{op}, \wedge)$ in die symmetrisch monoidale Kategorie $(Ch(Ab), \otimes)$ ist ein E_∞-monoidaler Funktor.*

Bemerkung 6.3.3 *Besteht man darauf, daß E_∞-Operaden Σ-frei sein sollen (wie wir das hier von Anfang an getan haben), so bekommt man durch das nachfolgende Lemma eine Σ-freie Ersetzung einer azyklischen Operade.*

Lemma 6.3.4 *Für eine azyklische Operade P, deren Komponenten $P(n)$ freie abelsche Gruppen sind, gibt es eine E_∞-Operade P' und eine Abbildung von Operaden $P' \longrightarrow P$.*

Beweis
Das Tensorprodukt einer beliebigen E_∞-Operade A mit der Ausgangsoperade P

$$(P \otimes A)(j) = P(j) \otimes A(j)$$

liefert eine azyklische Operade. Die Komponenten sind Σ-frei, weil $A(n)$ frei ist über $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ und $P(n)$ frei ist. Über die Augmentation von A erhalten wir die erforderliche Abbildung $P \otimes A \longrightarrow P$ von Operaden. □

6.4 Eine E_∞-Struktur für Q_*

Ausgehend von der E_∞-Operade, die auf SQ_* operiert, wollen wir nun zur Q-Konstruktion überwechseln. Zu diesem Zweck benutzen wir die linke Kan-Erweiterung $t_! : Ab^{\Gamma^{op}} \longrightarrow Ab^{ab}$ des Funktors t. Dabei bezeichnet ab die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen. Die Funktoren $t_!$ und $(t \times \cdots \times t)_!$ sind beide rechtsexakt, weil sie linksadjungiert sind zu der Vorschaltung von t beziehungsweise $(t \times \cdots \times t)$:

$$Nat(t_! F, G) \cong Nat(F, G \circ t) \quad \forall F \in Ab^\Gamma, G \in Ab^{ab}$$

Die nächsten beiden Lemmata transferieren die Operadenoperation auf SQ_* auf eine Operadenoperation für Q_*.

Lemma 6.4.1 *Linke Kan-Erweiterungen kommutieren mit externen Tensorprodukten von Funktoren, d.h. für zwei Funktoren $f : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ und $g : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ von zwei kleinen Kategorien $\underline{A}, \underline{C}$ und für zwei Funktoren $F : \underline{A} \longrightarrow Ab$ und $G : \underline{C} \longrightarrow Ab$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$(f \times g)_!(F \boxtimes G) \xrightarrow{\cong} f_! F \boxtimes g_! G.$$

Dabei ist $(F \boxtimes G)(a, c) = F(a) \otimes G(c)$.

Beweis
Zunächst konstruieren wir eine Transformation

$$(f \boxtimes g)_!(F \boxtimes G) \longrightarrow (f_! F) \boxtimes (g_! G).$$

Aus der Adjunktionsformel für die Kan-Erweiterung haben wir Morphismen $F(a) \to f_! F(f(a))$ und $G(c) \to g_! G(g(c))$ für jedes $a \in \underline{A}$ und jedes $c \in \underline{C}$, die natürlich in a und c sind. Das Tensorieren dieser Morphismen gibt

$$F(a) \otimes G(c) \longrightarrow f_! F(f(a)) \otimes g_! G(g(c)).$$

Folglich erhält man

$$(F \boxtimes G)(a, c) \longrightarrow (f_! F \boxtimes g_! G)((f \times g)(a, c)).$$

Aus der universellen Eigenschaft der Kan-Erweiterung ergibt sich nun eine natürliche Transformation

$$(f \times g)_!(F \boxtimes G) \longrightarrow f_! F \boxtimes g_! G.$$

Weil $(f \times g)_!$ rechtsexakt ist und direkte Summen erhält, brauchen wir die Behauptung nur für die projektiven Erzeuger $\underline{A}^a(x) = \mathbb{Z}[Hom_{\underline{A}}(a, x)]$ zu zeigen. Also genügt es, die Fälle $F = \underline{A}^a$ und $G = \underline{C}^c$ zu betrachten.

Aber

$$\underline{A}^a \boxtimes \underline{C}^c = (\underline{A} \times \underline{C})^{(a,c)}.$$

Daher erhalten wir

$$(f \times g)_!(\underline{A}^a \boxtimes \underline{C}^c) = (f \times g)_!((\underline{A} \times \underline{C})^{(a,c)}) = (\underline{B} \times \underline{D})^{(f(a),g(c))}.$$

Andererseits gilt

$$f_! \underline{A}^a \boxtimes g_! \underline{C}^c = \underline{B}^{f(a)} \boxtimes \underline{D}^{g(c)} = (\underline{B} \times \underline{D})^{(f(a),g(c))},$$

und damit ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung 6.4.2 *Aus dem Beweis des Lemmas folgt weiterhin, daß der natürliche Isomorphismus*

$$(f \times g)_!(F \boxtimes G) \xrightarrow{\cong} f_! F \boxtimes g_! G$$

sogar symmetrisch monoidal ist, falls $\underline{A} = \underline{C}$ und $\underline{B} = \underline{D}$.

Lemma 6.4.3 *Der Funktor $(t \times \cdots \times t)_! : Ab^{(\Gamma \times \ldots \times \Gamma)^{op}} \to Ab^{ab \times \ldots \times ab}$ ist ein $Ch(Ab)$-Funktor.*

Beweis
Aus den gleichen Gründen wie im Beweis des vorigen Lemmas genügt es, die Behauptung für die Funktoren $A \otimes \Gamma_{S_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma_{S_n}(X_n)$ für endliche punktierte Mengen S_i und eine abelsche Gruppe A zu zeigen.
Dafür muß man herausfinden, was

$$(t \times \ldots \times t)_!(A \otimes \Gamma_{S_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma_{S_n}(X_n))$$

ist. Wendet man das vorige Lemma an, so sieht man, daß dieser Ausdruck isomorph ist zu

$$t_!(A \otimes \Gamma_{S_1}(X_1)) \otimes \cdots \otimes t_!(\Gamma_{S_n}(X_n))$$

Aber $t_!(A \otimes \Gamma_{S_1}(X_1))$ ist isomorph zu $A \otimes t_!(\Gamma_{S_1}(X_1))$; dies stimmt für freies A und damit folgt der allgemeine Fall aus der Rechtsexaktheit von $t_!$.
Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}&(t \times \ldots \times t)_!(A \otimes \Gamma_{S_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma_{S_n}(X_n))\\ &\quad = A \otimes (t \times \ldots \times t)_!(\Gamma_{S_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma_{S_n}(X_n)).\end{aligned}$$ □

Nun haben wir alle Hilfsaussagen zusammen, um folgendes Theorem zu beweisen:

Theorem 6.4.4 *Der Funktor $Q_* : (Ab, \otimes) \longrightarrow (Ch(Ab), \otimes)$ ist E_∞-monoidal, und daher ist die Eilenberg-MacLane'sche kubische Konstruktion $Q_*(R)$ eine E_∞-Algebra für jeden kommutativen Ring R.*

Beweis
Wir haben die Beziehung $t_! SQ_* = Q_*$, weil aus der universellen Eigenschaft der Kan-Erweiterungen folgt, daß $t_!$ darstellbare Funktoren in $Ab^{\Gamma^{op}}$ wieder auf darstellbare Funktoren abbildet: Wir erhalten für $\widetilde{SQ}_l = \Gamma(-, [1]^l)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}&(t_! \Gamma(-, [1]^l))(A)\\ &\qquad \cong \mathbb{Z}[Hom_{Ab}(A, t([1]^l))] \cong \mathbb{Z}[Hom_{Ab}(A, Hom_{Sets_*}([1]^l, \mathbb{Z}))]\\ &\qquad \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}[[1]^l] \otimes A]\end{aligned}$$

also gerade die unnormalisierte kubische Konstruktion. Die Relationen in SQ_* lassen sich ebenso durch darstellbare Funktoren repräsentieren und sind gerade so gemacht, daß sie durch $t_!$ ineinander übergehen. □

Mit dem vorigen Lemma erhält man natürliche Transformationen

$$O(n) \otimes Q_*^{\boxtimes n} \longrightarrow (t \times \cdots \times t)_! SQ_*^{\wedge n}.$$

Es sei $Q_*^{\otimes n}$ der Funktor, der zuerst das Tensorprodukt von n abelschen Gruppen bildet und darauf $Q(-)$ anwendet, d.h.

$$Q_*^{\otimes n}(A_1, \dots, A_n) = Q_*(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n).$$

Dann resultieren aus der universellen Eigenschaft der Kan-Erweiterung natürliche Transformationen

$$(t \times \cdots \times t)_! SQ_*^{\wedge n} \longrightarrow Q_*^{\otimes n},$$

und zwar wie folgt: Ersetzt man in dem natürlichen Homomorphismen

$$SQ_*(S) \longrightarrow (t_! SQ_*)(t(S))$$

die Menge S durch $S_1 \wedge \ldots \wedge S_n$, so kommt man zu

$$SQ_*^{\wedge n}(S_1, \dots, S_n) = SQ_*(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n) \longrightarrow (t_! SQ_*)(t(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n)).$$

Die rechte Seite läßt sich umformen in

$$\begin{array}{rcl} t(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n) & = & Hom_{Sets_*}(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n, \mathbb{Z}) \\ & = & Hom_{Sets_*}(S_1; \mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes Hom_{Sets_*}(S_n, \mathbb{Z}) \\ & = & t(S_1) \otimes \cdots \otimes t(S_n) \end{array}$$

also ergibt sich insgesamt

$$\begin{tikzcd} SQ_*^{\wedge n}(S_1, \dots, S_n) \arrow[r] & (t_! SQ_*)(t(S_1) \otimes \cdots \otimes t(S_n)) \arrow[d, "="] \\ & (t_! SQ_*)^{\otimes n}(t(S_1), \dots, t(S_n)). \end{tikzcd}$$

Aus der Universalität entsteht nun die gewünschte Transformation

$$(t \times \cdots \times t)_! SQ_*^{\wedge n} \longrightarrow (t_! SQ_*)^{\otimes n} = Q_*^{\otimes n}.$$

Nun benutzen wir, daß ein E_∞-monoidaler Funktor ein kommutatives Monoid, also hier einen kommutativen Ring, in ein E_∞-Monoid abbildet. Damit ist $Q_*(R)$ eine E_∞-Algebra für jeden kommutativen Ring R. $\square$

6.5 Ausdehnung der E_∞-Struktur auf sämtliche $Q^k_*(R)$

Theorem 6.5.1 *Für einen kommutativen Ring R ist die k-te Q-Konstruktion $Q^k_*(R)$ eine E_∞-Algebra.*

Beweis
Wir begründen in diesem Beweis lediglich, warum man den Beweis für $k = 1$ auf den allgemeinen Fall übertragen darf.

Der Funktor SQ^k_* ist nach Lemma 4.2.2 eine projektive Auflösung von t^k. Die Operade $O_{SQ^k_*(n)} := \mathcal{H}om((SQ^k_*)^{\boxtimes n}, (SQ^k_*)^{\wedge n})$ hat die Homologie

$$H_i O_{SQ^k_*}(n) \begin{cases} 0 & : \quad i > 0 \\ Ext^{-i}_{\mathcal{F}_n}((t^k)^{\boxtimes n}, (t^k)^{\wedge n}) & : \quad i \leq 0 \end{cases}$$

und kann daher abgeschnitten werden zu einer Operade $\tau(O_{SQ^k_*})$, die in nichtnegativen Graden konzentriert ist und eine Abbildung in ihre Homologie erlaubt. Diese Homologieoperade ist Ziel einer Abbildung aus der Operade Com der kommutativen Algebren, weil es wiederum ein ausgezeichnetes Element $\mathcal{M}^{(k)}$ in $Hom((t^k)^{\boxtimes n}, (t^k)^{\wedge n})$ gibt. Wir definieren diese Transformation für den Fall $n = 2$; der allgemeine Fall ist dann eine direkte Verallgemeinerung. Seien X_+ und Y_+ zwei Objekte aus Γ. Wir benötigen eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{M}^{(k)}_{(X_+,Y_+)} : t^k(X_+) \otimes t^k(Y_+) \longrightarrow t^k(X_+ \wedge Y_+) = t^k((X \times Y)_+)$$

Für zwei Erzeuger $S \in t^k(X_+)$ und $T \in t^k(Y_+)$ sei $\mathcal{M}^{(k)}_{(X_+,Y_+)}(S,T)$ gesetzt als die Äquivalenzklasse $[S \times T]$ des Produkts $S \times T$ der beiden Erzeuger in $t^k(X_+ \wedge Y_+)$. Dafür sei erinnert, daß t^k die nullte Homologie des Γ^{op}-Komplexes SQ^k_* ist. Ist die Mächtigkeit des Produktes größer als k, so wird $S \times T$ durch den Rand δ^1 von SQ^k_* in Teilmengen der Mächtigkeit $\leq k$ zerlegt, wie es der Definition von t^k als nullte Homologie von SQ^k_* entspricht.

$$\mathcal{M}^{(k)}_{(X_+,Y_+)}(S,T) := [S \times T] .$$

Wir setzen diese Abbildung bilinear auf allgemeine Elemente aus $t^k(X_+)$ bzw. $t^k(Y_+)$ fort. Betrachten wir Morphismen $g_1 : X^1_+ \to X^2_+$ und $g_2 : Y^1_+ \to$

Y_+^2, so ergibt sich die Natürlichkeit aus der Tatsache, daß sich die Zerlegungen der Urbilder unter den g_i mit den Zerlegungen in der Produktmenge vertragen. Aus der Definition ergibt sich auch direkt, daß $\mathcal{M}^{(k)}$ mit der Operation der symmetrischen Gruppe vertauscht. Für den Fall $k = 1$ stimmt $\mathcal{M}^{(1)}$ mit der kanonischen Abbildung $m : t(X_+) \otimes t(Y_+) \to t(X_+ \wedge Y_+)$ aus 6.3.1 überein.

Für die E_∞-Struktur der k-ten kubischen Konstruktion bilden wir also die Eins $1 \in \mathbb{Z} = Com(n)$ auf die natürliche Transformation $\mathcal{M}^{(k)}$ ab. Die Operade O, die sich aus dem Pullback des Diagramms

$$\begin{tikzcd} O(n) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \tau(O_{SQ_*^k}) \arrow[d, "\sim"] \\ \mathrm{Com} \arrow[r] & \mathcal{H}om((t^k)^{\boxtimes n}, (t^k)^{\wedge n}) \end{tikzcd}$$

ergibt, ist eine azyklische Operade, die auf $SQ_*^k(n)$ über die Pullbackabbildung operiert. Mit der linken Kan-Erweiterung $t_!$ von t können wir wie im Fall $k = 1$ diese Operation auf eine Operadenoperation auf Q_*^k überführen, weil man genauso wie im Fall $k = 1$ beweisen kann, daß die linke Kan-Erweiterung des Funktors t die k-te kubische Konstruktion für Mengen auf die k-te Eilenberg-MacLane Q-Konstruktion abbildet: $t_!(SQ_*^k) \cong Q_*^k$. Für diesen Isomorphismus benutzt man nur, daß $t_!$ darstellbare Funktoren in darstellbare überführt (vergleiche 6.4). $\square$

6.6 Der Funktor Q_* und Algebren über Operaden

Die Q-Konstruktion betrachtet man normalerweise für abelsche Gruppen. Mit dem Ergebnis aus dem letzten Abschnitt wissen wir, daß der Funktor Q_* kommutative Algebren auf E_∞-Algebren abbildet. Wegen der Assoziativität des Dixmier-Produktes ist es klar, daß $Q_*(-)$ assoziative Algebren in ebensolche überführt. Aber es ist überhaupt nicht klar, was passiert, wenn wir den Funktor $Q_*(-)$ auf eine Algebra über einer beliebigen Operade O anwenden.

Der Fall der kommutativen Algebren zeigt, daß das Resultat keineswegs wieder eine O-Algebra sein muß. Uns interessieren besonders die Fälle von

E_∞- und A_∞-Algebren. Um diese Fragestellung überhaupt sinnvoll untersuchen zu können, müssen wir die Definition des Funktors $Q_*(-)$ auf die Kategorie der Kettenkomplexe erweitern. Wir tun dies durch gradweise Erweiterung. Homotopierelationen bleiben dabei erhalten, weil Q_* additiv bis auf Homotopie ist. Ein mehr oder weniger direkter Beweis dieser Tatsache findet sich bei Johnson und McCarthy [J-McC2, §6, §7].

Schränkt man sich zunächst auf Operaden ein, die keine Operation der symmetrischen Gruppe tragen, so findet man eine zufriedenstellende Antwort:

Proposition 6.6.1 *Die Q-Konstruktion Q_* bildet Algebren über einer Operade ohne Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{P}$ auf Algebren über der Operade $Q_*(\mathcal{P})$ ab.*

Beweis
Zuerst sollten wir die Operadenstruktur auf $Q_*(\mathcal{P})$ klären: Wir definieren die neue Operade als $Q_*(\mathcal{P})(n) := Q_*(\mathcal{P}(n))$. Weil die $\mathcal{P}(n)$ selbst schon aus Kettenkomplexen bestehen, nehmen wir den Totalkomplex der gradweisen Erweiterung von Q_*:

$$(Q_*(\mathcal{P}(n)))_l := \oplus_{p+q=l} Q_p(\mathcal{P}(n)_q)$$

Die Verknüpfung in $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n) \longrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)$$

wird über die Verknüpfung in $Q_*(\mathcal{P})$ über das Dixmier Produkt definiert:

$$\begin{tikzcd}
Q_*(\mathcal{P}(n)) \otimes Q_*(\mathcal{P}(k_1)) \otimes \cdots \otimes Q_*(\mathcal{P}(k_n)) \arrow[d] & \\
Q_*(\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n)) \arrow[r] & Q_*(\mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} k_i))
\end{tikzcd}$$

Das Assoziativitätsaxiom ist erfüllt, weil das Dixmier Produkt assoziativ ist und weil $\mathcal{P}$ eine Operade ist. Die Abbildung für die Einheit in $\mathcal{P}$

$$\eta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{P}(1)$$

geht über in eine Abbildung von Komplexen

$$\tilde{\eta} : \mathbb{Z} \hookrightarrow Q_*(\mathbb{Z}) \xrightarrow{Q_*(\eta)} Q_*(\mathcal{P}(1))$$

mit $\tilde{\eta}(\mathbb{Z}) \subset Q_0(\mathcal{P}(1)_0)$. Aber $Q_0(\mathcal{P}(1)_0) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{P}(1)_0]$. Daher können wir die Einheit der in $Q_*(\mathcal{P}(1))$ als das Bild der Einheit von $\mathcal{P}$ unter diesem Isomorphismus definieren .
Ist A eine $\mathcal{P}$-Algebra, so gehen die Strukturabbildungen

$$\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\nu} A$$

über zu

$$Q_*(\mathcal{P}(n)) \otimes Q_*(A)^{\otimes n} \to Q_*(\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n}) \xrightarrow{Q_*(\nu)} Q_*(A).$$

Also ist $Q_*(A)$ eine $Q_*(\mathcal{P})$-Algebra. □

Für A_∞-Operaden läßt sich ein ähnliches Ergebnis leicht erzielen.

Proposition 6.6.2 *Ist O eine A_∞-Operade, deren Komponenten $O(n)$ gradweise freie abelsche Gruppen sind, so ist $Q_*(O)$ wieder eine A_∞-Operade.*

Beweis
Was noch zu zeigen bleibt, ist daß Q_* azyklische Operaden über $\mathbb{Z}$ auf azyklische abbildet. Da die Augmentation $O \to \mathbb{Z}$ eine schwache Äquivalenz ist und da O gradweise frei ist, erhalten wir, daß die Augmentation eine Homotopie-Äquivalenz induziert. Also folgt die Behauptung aus dem Resultat von Johnson und McCarthy ([J-McC2, §7]). □

Bemerkung 6.6.3 *MacLane-Homologie eines Ringes R mit Koeffizienten in einem Bimodul M ist definiert als die Hochschild-Homologie von $Q_*(R)$ mit Koeffizienten in M. Da die kubische Konstruktion A_∞-Algebren über freien Operaden erhält, ist es möglich, die Definition von MacLane-Homologie auf diese Sorte Algebren auszudehnen, weil Hochschild-Homologie für A_∞-Algebren schon in der Arbeit von Getzler und Jones (siehe [Ge-J]) definiert ist.*

Für eine Operade ohne Operation der symmetrischen Gruppe überträgt Q_* die gesamte Struktur dieser Operade. Andererseits mußte man dazu die Operade wechseln und Q_* auf sie anwenden. Daß dies nicht immer nötig ist, sieht man am Fall der assoziativen Algebren: Hier darf die Operade so bleiben, wie sie war. Der dahinterliegende Grund ist die spezielle Form der Operade As. Für die folgende Sorte von Operaden erhalten wir ein stärkeres Ergebnis:

Definition 6.6.4 *Eine Operade K heißt* simplizial*, falls sie eine Operade in der symmetrisch monoidalen Kategorie simplizialer Mengen (s.Sets, $\times$) ist, d.h. jedes $K(n)$ ist eine simpliziale Menge und die Verknüpfungsabbildungen sind Morphismen simplizialer Mengen.*

Bemerkung 6.6.5 *Jede simpliziale Operade K führt zu einer Operade in der Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen, indem wir den Kettenkomplex zu der freien simplizialen Gruppe $\mathbb{Z}[K]$ betrachten.*

Für Algebren dieses Typs beweisen wir:

Proposition 6.6.6 *Ist K eine simpliziale Operade ohne Operation der symmetrischen Gruppen und ist A eine Algebra über $\mathbb{Z}[K]$, dann ist $Q_*(A)$ immer noch eine $\mathbb{Z}[K]$-Algebra.*

Beweis
Wir benötigen die Strukturabbildungen

$$\mathbb{Z}[K(n)] \otimes Q_*(A)^{\otimes n} \longrightarrow Q_*(A)$$

für die Operation von $\mathbb{Z}[K]$ auf $Q_*(A)$. Sei γ die Strukturabbildung für die Operation von $\mathbb{Z}[K]$ auf A. Für jedes Element $\omega \in K(n)$ erhalten wir Abbildungen

$$Q_*(\gamma(\omega)) : Q_*(A^{\otimes n}) \longrightarrow Q_*(A).$$

Diese können wir linear auf $\mathbb{Z}[K](n)$ ausdehnen und erhalten

$$\mathbb{Z}[K(n)] \otimes Q_*(A)^{\otimes n} \longrightarrow Q_*(A)$$

□

Beispiel
Wie wir schon gesehen haben, müssen wir die Operade As nicht ändern, wenn wir Q_* auf assoziative Algebren anwenden. Die Operade As aufgefaßt als Operade ohne Operation der symmetrischen Gruppe kommt von der simplizialen Operade $K(n) = *$.

Für gewöhnliche Operaden - also mit Σ_n-Operationen - erhalten wir ein leicht anderes Ergebnis:

Proposition 6.6.7 *Ist L eine simpliziale Operade und ist A eine $\mathbb{Z}[L]$-Algebra, so ist $Q_*(A)$ eine Algebra über der Operade $\mathbb{Z}[L] \otimes O$, wobei O die E_∞-Operade ist, die wir im vorigen Abschnitt konstruiert haben.*

Beweis
Zuerst nutzen wir die Operation ψ der Operade O auf Q_* und erhalten Abbildungen

$$\mathbb{Z}[L(n)] \otimes O(n) \otimes Q_*(A)^{\otimes n} \xrightarrow{id \otimes \psi} \mathbb{Z}[L(n)] \otimes Q_*(A^{\otimes n})$$

Dieselbe Methode wie im vorigen Beweis gibt dann die gewünschte Strukturabbildung. Die Äquivarianz von ψ garantiert die Äquivarianz der gesamten Abbildung. $\square$
Für den allgemeinsten Fall der E_∞-Algebren können wir nur ein relativ schwaches Ergebnis vorweisen:

Proposition 6.6.8 *Für jede E_∞-Algebra A gibt es eine quasi-isomorphe E_∞-Algebra B, so daß $Q_*(B)$ wieder eine E_∞-Algebra ist.*

Beweis
Für zwei E_∞-Operaden A, B über $Ch(Ab)$) und für eine A-Algebra X gibt es eine funktorielle Ersetzung von X durch eine quasi-isomorphe B-Algebra Y (siehe [K-M, Teil V, Theorem 1.7]). Insbesondere kann man diese Operade so wählen, daß sie von einer simplizialen Operade stammt, also einer Operade der Form $\mathbb{Z}[L]$. Mit der letzten Proposition erhalten wir, daß $Q_*(B)$ eine Algebra über der Operade $\mathbb{Z}[L(n)] \otimes O(n)$ ist; aber das Tensorprodukt zweier E_∞-Operaden ist wieder E_∞. $\square$

6.7 Der E_∞-komonoidale Funktor C_*

Die Methode, die wir verwendet haben, um zu zeigen, daß SQ_* ein E_∞-monoidaler Funktor ist, läßt sich auch auf andere Beispiele anwenden. Man kann damit zeigen, daß der schwach komonoidale und symmetrisch monoidale Funktor C_*, der eine simpliziale abelsche Gruppe auf den zugehörigen Kettenkomplex abbildet, ein E_∞-komonoidaler Funktor ist. Diese Tatsache ist nicht neu; eine Behandlung dieses Problems findet sich zum Beispiel in Smirnovs Arbeit [Sm], aber es ist bis jetzt kein einfacher Beweis bekannt. Alle Berechnungen, die wir hier benutzen, sind elementar und gehen auf Dolds Artikel [D, §1] zurück.

Für alle n-Tupel simplizialer abelscher Gruppen $A_1, \ldots, A_n$ gibt es eine Abbildung vom Kettenkomplex des internen Tensorprodukts in das äußere Tensorprodukt der Kettenkomplexe:

$$C_*^{\otimes n}(A_1, \ldots, A_n) := C_*(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) \longrightarrow C_*(A_1) \otimes \cdots \otimes C_*(A_n)$$

Es liegt nun nahe, welche Operade man zu definieren hat, die auf dem Bild von C_* operieren soll, nämlich

$$O(n) = \mathcal{H}om_*(C_*^{\otimes n}, C_*^{\boxtimes n})$$

Dabei steht $\mathcal{H}om$ für den Morphismenkomplex der natürlichen Transformationen der beiden Funktoren. Wie Dold in [D] begründet hat, ist die Homologie dieser Operade in nichtnegativen Dimensionen trivial außer in der Dimension null.

$$H_r O(n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad r = 0 \\ 0 & , \quad r > 0 \end{cases}$$

Der Isomorphismus von $H_0(O(n))$ nach $\mathbb{Z}$ ist durch die Augmentationsabbildung gegeben. Daher erhalten wir eine Abbildung von der abgeschnittenen Operade $\tau(O)$ in die Operade Com, die ein Isomorphismus in der Homologie ist; also ist $\tau(O)$ eine E_∞-Operade und C_* ist ein E_∞-komonoidaler Funktor vermittels der Abbildungen

$$\tau(O)(n) \otimes C_*(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) \longrightarrow C_*(A_1) \otimes \cdots \otimes C_*(A_n)$$

Also ist auch der Kettenkomplex eines topologischen Raumes eine E_∞-Koalgebra.

Literaturverzeichnis

[Ba] M. Basterra, André-Quillen homology of commutative S-algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 144 (2), 1999, S. 111-143

[B] A.K. Bousfield, Operations on derived functors of non-additive functors, Manuskript, Brandeis University, 1967

[B-F] A.K. Bousfield, E.M. Friedlander, Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets, Springer Lecture Notes in Mathematics 658, 1978, 80-150

[D] A. Dold, Über die Steenrodschen Kohomologieoperationen, Ann. of Math. 73, 1961, 258-294

[D-P] A.Dold, D. Puppe, Homologie nicht-additiver Funktoren, Anwendungen , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11, 1961, 201-312

[D-S] D.W. Dwyer, J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, in: I.M. James (Editor), Handbook of Algebraic Topology, North-Holland 1995, 73-126

[Du] E.J. Dubuc, Kan extensions in enriched category theory, Lecture Notes in Mathematics 145, Springer 1970

[D-McC] B.I. Dundas and R. McCarthy, Stable K-theory and topological Hochschild homology, Ann. of Math. 140, 1994, 685-701

[E-M] S. Eilenberg, S. Mac Lane, On the groups $H(\pi, n)$, II, Ann. of Math. 60, 1954, 49-139

[E-M2] S. Eilenberg, S. Mac Lane, Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory I, Proc. Nat. A. Sci. 36, 1950

[F-P-S-V-W] Z. Fiedorowicz, T. Pirashvili, R. Schwänzl, R. Vogt, F. Waldhausen, MacLane homology and topological Hochschild homology, Math. Ann. 303, 1995, 149-164

[G-V] M. Gerstenhaber, A.A. Voronov, Homotopy G-algebras and moduli space operads, Int. Math. Research Notices, No. 3, 1995, 141-153

[Ge-J] E. Getzler, J.D.S. Jones, A_∞-algebras and the cyclic bar complex, Illinois J. Math. 34, 1990, 256-283

[Go-J] P.G. Goerss, J.F. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Birkhäuser Progress in Mathematics, 1999

[Go] T. Goodwillie, Calculus I (the first derivative of pseudoisotopy theory), II (Analytic functors) and III (The Taylor series of a homotopy functor), K-Theory 5,6, to appear

[Go2] T. Goodwillie, The Differential Calculus of Homotopy Functors, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Kyoto, 1990, 621-630

[H] M. Hovey, Model Categories, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 63, AMS, 1999

[I] L. Illusie, Complexe cotangent et deformations I,II Lecture Notes in Mathematics 239, 283, Springer 1972

[J-McC1] B. Johnson, R. McCarthy, Taylor towers for functors of additive categories, Journal of Pure and Applied Algebra 137, 1999, 253-284

[J-McC2] B. Johnson, R. McCarthy, Linearizations, Dold-Puppe Stabilization and MacLane's Q-construction, Transactions of the AMS, 350, 1998, No.4, 1555-1593

[J-McC3] B. Johnson, R. McCarthy, Deriving Calculus with Cotripels, Preprint 1999, siehe http://www.math.uiuc.edu/ randy/

[J-P] M. Jibladze, T. Pirashvili, Cohomology of algebraic theories, Journal of Algebra 137, 1991, 253-296

[Lo] J.-L. Loday, Cyclic homology, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 1997

[L] W. Lück, Transformation groups and algebraic K-theory. Lecture Notes in Mathematics 1408, Springer 1989

[Ly] M. Lydakis, Simplicial functors and stable homotopy theory, Preprint Bielefeld, 1998

[K-M] I. Kriz and J.P. May, Operads, algebras, modules and motives, Asterisque 233, 1995

[Md] I.G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979

[McC] R. McCarthy, Relative algebraic K-theory and topological cyclic homology, Acta Math. 179, 1997, 197-222

[ML] S. MacLane, Categories for the working mathematician, Springer, 1998

[P1] T. Pirashvili, Kan Extension and stable homology of Eilenberg and Mac Lane spaces, Topology 35, 1996, 883-886

[P2] T. Pirashvili, Dold-Kan type theorem for Γ-groups, erscheint in den Mathematischen Annalen (auch erhältlich als Preprint, Bielefeld 1998)

[P3] T. Pirashvili, Hodge Decomposition for Higher Order Hochschild Homology, erscheint in den Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure (auch erhältlich als Preprint, Bielefeld 1998)

[P4] T. Pirashvili, Polynomial Approximation of Ext and Tor Groups in Functor Categories, Communications in Algebra, 21(5), 1993, 1705-1719

[P-R] T. Pirashvili, B. Richter, Robinson-Whitehouse complex and stable homotopy, Topology Vol. 39,3 , 2000, 525-530

[P-W] T. Pirashvili, F. Waldhausen, MacLane homology and topological Hochschild homology, Journal of Pure and Applied Algebra 82, 1992, 81-98

[Re] O. Renaudin, Localisation homotopique et foncteurs entre espaces vectoriels, Thèse de doctorat, Université de Nantes, janvier 2000

[Ri] B. Richter, E_∞-structure for $Q_*(R)$, Mathematische Annalen 316, 3, 2000, 547-564

[Ro] A. Robinson, On a theorem of Pirashvili and Richter, preprint 1999

[R-W] A. Robinson, S. Whitehouse, Operads and Γ-homology of commutative rings, Prépublications Mathématiques de l'Université Paris 13, 1998

[Sch] H. Schubert, Kategorien, Heidelberger Taschenbücher 65,66, Springer 1970

[Sm] V.A. Smirnov, Homotopy theory of coalgebras, Math. USSR Izv, 1986, 575-592

[T] R.W. Thomason, First quadrant spectral sequences in algebraic K-theory via homotopy colimits, Comm. in Algebra 10, 1982, 1589-1669

[We] M. Weiss, Orthogonal Calculus, Transactions of the AMS, Vol. 347, No. 10, 1995, 3743-3796; Erratum Vol. 350, 1998, 851-855

[W] S. A. Whitehouse, Γ-(Co)homology of commutative algebras and some related representations of the symmetric group, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1994

Index

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, konkrete Aussagen über die Approximationstheorie von Funktoren zu erhalten. Wie in der Differentialrechnung gibt es für Funktoren F eine Taylorreihe mit polynomialen Approximationsgliedern P_nF. Goodwillie hat diese Taylorapproximation für Endofunktoren topologischer Räume bzw. simplizialer Mengen definiert, welche Homotopieäquivalenzen respektieren. Zu einem solchen Funktor F gibt es einen Taylorturm

$$\cdots \to P_{n+1}F \to P_nF \to \cdots \to P_1F \to P_0F,$$

so daß die P_nF gegen F konvergieren und „vom Grad n“ sind.

Wir betrachten solche Endofunktoren simplizialer Mengen, die von Funktoren stammen, die auf endlichen, punktierten Mengen definiert sind. Wir untersuchen Γ-Moduln, d.h. Funktoren F von der Kategorie der endlichen punktierten Mengen Γ in die Kategorie der R-Moduln für einen beliebigen kommutativen Ring R mit Eins. Solche Funktoren kann man zu Endofunktoren simplizialer Mengen umwandeln.

Wir erhalten folgende explizite Beschreibung der Homologie der Approximationsschritte P_nF für einen Γ-Modul F:

Theorem 4.2.3

$$H_*P_nF(\{0,1\}) \cong \mathrm{Tor}_*^{\Gamma}(t^n, F).$$

Hierbei ist t^n ein Funktor vom Grad n.

Auf Mengen mit mehreren Elementen leiten wir eine ähnliche Interpretation der Homologie als abgeleiteter Funktor her. Die Homologie der Homotopiefaser $D_nF_* := \mathrm{cone}_{*+1}(P_nF \to P_{n-1}F)$ läßt sich ebenfalls als abgeleiteter Funktor beschreiben. Wir konstruieren eine Spektralsequenz, die gegen die Homologie der Homotopiefaser konvergiert und nutzen diese für einige konkrete Berechnungen.

Anwendungen der Taylorapproximation finden sich in der Berechnung von Hochschild-Homologie höherer Ordnung. Die Linearisierung eines bestimmten Γ-Moduls gibt eine Querverbindung zu einer Homologietheorie für E_∞-Spektren/Algebren - der Gamma-Homologie: Für eine kommutative Algebra

A ist die Gamma-Homologie von A mit Koeffizienten in einem A-Modul M die Homologie der ersten Taylorapproximation des Funktors, der eine n-elementige punktierte Menge auf $M \otimes A^{\otimes n}$ abbildet. Mit den Methoden der Taylorapproximation gelingt es in 4.3.3, eine Formel für die Gamma-Homologie der Polynomalgebra $\mathbb{F}_2[x]$ anzugeben und in 4.3.4 eine Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz zu entwickeln, die von André-Quillen-Homologie ausgeht und gegen Gamma-Homologie konvergiert.

Die kubischen Konstuktionen von Eilenberg und MacLane $Q_*(A)$ sind die Linearisierungen $P_1(-)$ der Γ-Moduln $\mathbb{Z}\{\overline{A}\{-\}\}$. Für einen Ring R ist $Q_*(R)$ ein differentiell graduierter Ring. Diese Eigenschaft ist die Grundlage der Definition der MacLane-Homologie eines Ringes R als die Hochschild-Homologie der kubischen Konstruktion $Q_*(R)$. Ein kommutativer Ring R liefert allerdings keine kommutative Multiplikation in $Q_*(R)$, aber wir zeigen, daß in diesem Fall die Multiplikation bis auf höhere Homotopien kommutativ ist:

Theorem 6.4.4
Für einen kommutativen Ring R ist die kubische Konstruktion $Q_*(R)$ eine E_∞-Algebra.

Dieses Ergebnis dehnen wir auf die höheren Approximationen aus: Die n-te kubische Konstruktion $Q_*^n(R) := P_n\mathbb{Z}\{\overline{R}\{-\}\}[1]$ eines kommutativen Ringes ist ebenfalls eine E_∞-Algebra.

Die Homologie von $\mathbb{F}_2 \otimes Q_*(\mathbb{F}_2)$ ist das Duale der Steenrod-Algebra. Analog zu dieser fungieren die Homologiegruppen der höheren kubischen Konstruktionen als Homologieoperationen: Sie operieren auf den kubischen Konstruktionen von Endofunktoren auf Modulkategorien und operieren auf der Homologie von Funktoren aus einer Modulkategorie in die Kategorie der Kettenkomplexe, falls diese Funktoren homologisch vom Grad n sind.

Lebenslauf

Birgit Richter

geboren: 14.07.1971 in Dortmund

Ausbildung

Schule

Grundschule:	Berswordt-Grundschule in Dortmund	1978 bis 1982
Gymnasium:	Käthe-Kollwitz-Gymnasium in Dortmund	1982 bis 1991

Studienverlauf

Seit Oktober 1991:	Studium der Mathematik an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn mit Nebenfach Philosophie
August 1997:	Diplom in Mathematik an der Universität Bonn
Seit Oktober 1997:	Promotion in Mathematik