Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 9 Abgabetermin: 21. Januar 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei R' ein Unterring eines Ringes R und $I \subseteq R$ sei ein Ideal. Dann ist $I \cap R'$ ein Ideal in R'. Zeigen Sie, dass $R' + I$ ein Ring ist und dass $R'/(I \cap R')$ isomorph ist zu $(R' + I)/I$.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei sei R ein kommutativer Ring und S sei eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R.

(1) Ein Element x heißt *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $x^n = 0$ gilt. Wie sehen die nilpotenten Elemente in $R[S^{-1}]$ aus?

(2) Es sei R ein Hauptidealring und $0 \notin S$. Ist dann $R[S^{-1}]$ ebenfalls ein Hauptidealring? Begründen Sie Ihre Antwort.

(3) Was sind die möglichen Ideale in $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ für eine Primzahl p? Hierbei ist $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \mathbb{Z}[S^{-1}]$ mit $S = \{p^i, i \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

Ein Integritätsbereich R heißt *euklidisch*, falls es eine Abbildung $\nu\colon R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass es für alle Elemente $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ Elemente $x, r \in R$ gibt, so dass

$$b = xa + r \text{ und } \nu(r) < \nu(a) \text{ oder } r = 0.$$

(1) Es sei $d \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass d von keinem Quadrat einer natürlichen Zahl $\neq 1$ geteilt wird. Betrachten Sie
$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{x + y\sqrt{d} | x, y \in \mathbb{Q}\}$$
als Teilmenge der komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit der vererbten Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ ein Körper ist. (Rechnen Sie nur das nach, was Sie nachweisen müssen!)

(2) Sie dürfen benutzen, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist. Diesen Integritätsbereich nennt man *Ring der ganzen Zahlen des Körpers* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ euklidisch ist.

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Es sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring. Ist dann $\{0\}$ immer ein Primideal?

Ja ☐ Nein ☐ Ist der Ring der Gaußschen Zahlen, $\mathbb{Z}[i]$, ein Hauptidealring?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei K ein Körper und $R \neq 0$ ein beliebiger Ring. Kann ein Ringhomomorphismus $f\colon K \to R$ dann einen nicht-trivialen Kern haben?

Ja ☐ Nein ☐ Es seien R und R' zwei nicht-triviale Ringe und $f\colon R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen. Gilt dann $f(R^\times) \subset R'^\times$?

Ja ☐ Nein ☐ Ist der Restklassenring $\mathbb{Z}[i]/(3 - i)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$?