

Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 8

Abgabetermin: 14. Januar 2021

Aufgabe 1

(2 Punkte)

Bestimmen Sie die Torsionselemente der Faktorgruppen \mathbb{R}/\mathbb{Z} und \mathbb{Q}/\mathbb{Z} von $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$.

Aufgabe 2

(2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die Teilmenge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und definieren Sie die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}[i]$ analog zu den entsprechenden Verknüpfungen in \mathbb{C} . Damit ist $\mathbb{Z}[i]$ ein kommutativer Ring, der *Ring der Gaußschen Zahlen* (nach Carl Friedrich Gauß).

- (1) Bestimmen Sie die Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}[i]$.
- (2) Zerlegen Sie die Primzahl $2 \in \mathbb{Z}$ in ein nicht-triviales Produkt in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 3

(3+2 Punkte)

Wir betrachten den \mathbb{R}^4 und nennen seine Standardbasis $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, i, j, k)$. Wir definieren eine Multiplikation auf diesem Vektorraum durch eine Multiplikation auf der Basis, indem wir 1 als neutrales Element für die Multiplikation wählen und ansonsten setzen

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & ij &= k, & ik &= -j, \\ ji &= -k, & j^2 &= -1, & jk &= i, \\ ki &= j, & kj &= -i, & k^2 &= -1. \end{aligned}$$

Die *Hamiltonschen Quaternionen*, \mathbb{H} , bezeichnen diesen Vektorraum mit der so definierten Multiplikation.

- (1) Zeigen Sie, dass \mathbb{H} ein Schiefkörper aber kein Körper ist.
- (2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^3 = \{w \in \mathbb{H}, \|w\| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist und dass diese isomorph ist zu $SU(2)$. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^4 .

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja Nein Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Ist G genau dann zyklisch, wenn G keine Untergruppe der Form $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzt (p prim)?
- Ja Nein Es sei $R \neq 0$ ein Ring. Bilden dann die Einheiten des Ringes R , R^\times , eine Gruppe?
- Ja Nein Es sei G eine beliebige Gruppe. Bilden dann die Endomorphismen von G immer einen Ring, wenn man die Komposition von Abbildungen als multiplikative Verknüpfung wählt und die Verknüpfung $(f + g)(x) := f(x)g(x)$ für Endomorphismen f und g und Gruppenelemente $x \in G$ als Addition ansetzt?
- Ja Nein Es sei R ein kommutativer Ring, $x \in R^\times$ und $(x) = \{x \cdot y, y \in R\}$. Ist dann $(x) = R$?
- Ja Nein Es sei R ein Ring. Gilt dann für alle $a \in R$ die Gleichheit $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$?