Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 7 Abgabetermin: 7. Januar 2021

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(1) Es sei G eine Gruppe und N sei eine normale Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass G/N genau dann abelsch ist, wenn $[G, G] < N$. Insbesondere ist $G/[G, G]$ abelsch.
(2) Es sei G eine einfache, nicht-abelsche Gruppe und A sei eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass alle Homomorphismen $f\colon G \to A$ trivial sind.

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe. Der *Exponent von G* sei die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $g^n = 1$ für alle $g \in G$.

(1) Zeigen Sie, dass der Exponent von G das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der Elemente in G ist.
(2) Beweisen Sie: Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m = 1$ gegeben für alle g in G, so teilt der Exponent m. Der Exponent von G teilt $|G|$.
(3) Was ist der Exponent von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) und von der Diedergruppe D_{2n} mit $2n$ Elementen ($n \geqslant 3$)?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachten Sie die Gruppe $G = \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass G nicht isomorph ist zur direkten Summe $G/G_{\text{tor}} \oplus G_{\text{tor}}$.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass es in der Faktorgruppe G/G_{tor} ein Element $x \neq 0$ gibt, dass durch jede Primzahl p teilbar ist. Gibt es ein solches Element in G?)

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Gibt es eine nicht-abelsche Gruppe G, deren Torsionsmenge $\{g \in G | \exists n \in \mathbb{N}, g^n = 1\}$ keine Untergruppe ist?

Ja ☐ Nein ☐ Kann es eine endliche abelsche Gruppe G geben, für die die Torsionsuntergruppe eine echte Untergruppe ist?

Ja ☐ Nein ☐ Ist $(\mathbb{Q}, +)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe?

Ja ☐ Nein ☐ Ist jede abelsche Torsionsgruppe endlich?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei $\mathbb{S}^1$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Gibt es einen nicht-trivialen Homomorphismus von A_7 nach $\mathbb{S}^1$?