Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 6 Abgabetermin: 17. Dezember 2020

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die Menge aller Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(1) Zeigen Sie, dass diese Menge mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet, in der jedes Element eine Ordnung kleiner oder gleich 3 hat.

(2) Bestimmen Sie das Zentrum dieser Gruppe und geben Sie eine Kompositionsreihe an.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass Gruppen G mit $|G| = p^2q$ auflösbar sind, falls p und q Primzahlen sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die A_5 die kleinste nicht-auflösbare Gruppe ist, d.h. dass alle Gruppen mit G mit $|G| < 60$ auflösbar sind. (Wenn Sie nur drei Fälle nicht hinbekommen, erhalten Sie 3 Punkte.)

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Besitzt $\mathbb{Z}$ eine Kompositionsreihe?

Ja ☐ Nein ☐ Sind Diedergruppen auflösbar?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei k ein Körper und B die Untergruppe der $GL_2(k)$, die aus oberen Dreiecksmatrizen besteht. Ist B auflösbar?

Ja ☐ Nein ☐ Ist jede Gruppe der Ordnung 6 isomorph zu Σ_3 oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Ja ☐ Nein ☐ Besitzt jede endliche Gruppe eine Kompositionsreihe?