

Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 5

Abgabetermin: 10. Dezember 2020

Aufgabe 1

(1+3+2 Punkte)

- (1) Es sei N ein Normalteiler einer endlichen Gruppe G und $|N| = p$ für eine Primzahl p . Beweisen Sie, dass N in jeder p -Sylowuntergruppe von G enthalten ist.
- (2) Es sei p eine Primzahl. Sind dann alle Gruppen G mit $|G| = p^2$ abelsch? Wie viele solcher Gruppen gibt es bis auf Isomorphie?
- (3) Es sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
 - Die Gruppe G ist eine p -Gruppe.
 - Für alle $g \in G$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass die Ordnung von g gleich p^ℓ ist.

Aufgabe 2

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Signumsabbildung

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Welche Elemente in $\sigma \in \Sigma_4$ haben die Eigenschaft, dass ihr Träger die gesamte Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist? Bilden diese Elemente (zusammen mit der Identität) eine Untergruppe von Σ_4 ?

Sammeln Sie in dieser Menge alle Elemente der Ordnung 2 zusammen und ergänzen Sie mit der Identität. Ist dies eine Gruppe?

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja Nein Es sei G eine Gruppe mit 125 Elementen. Gibt es in G dann immer ein Element $x \neq 1$, welches mit allen Elementen aus G kommutiert?
- Ja Nein Ist das Signum eines 427365-Zykels -1 ?
- Ja Nein Ist jede Gruppe der Ordnung 51 zyklisch?
- Ja Nein Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so dass eine Primzahl p die Mächtigkeit von G teilt. Kann G dann mehrere p -Sylowuntergruppen haben?
- Ja Nein Sind die symmetrischen Gruppen Σ_n für $n \geq 3$ semidirekte Produkte der Form $\Sigma_n \cong A_n \rtimes H$ für eine geeignete Untergruppe $H < \Sigma_n$?