Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 4 Abgabetermin: 3. Dezember 2020

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

(1) Es sei H eine Untergruppe von G und $N_G(H)$ sei der Normalisator von H in G. Zeigen Sie, dass $N_G(H)$ die größte Untergruppe von G ist, in der H normal ist.

(2) Für eine Teilmenge X von G sei der Zentralisator von X in G definiert als

$$Z_G(X) := \{g \in G | \, gx = xg \quad \forall x \in X\}.$$

Es sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass der Zentralisator $Z_G(H)$ ein Normalteiler des Normalisators $N_G(H)$ ist und beweisen Sie, dass $N_G(H)/Z_G(H)$ isomorph ist zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(H)$.

(3) Es sei $n > 1$. Betrachten Sie die Untergruppe $D < SL_n(\mathbb{R})$, die aus Diagonalmatrizen in $SL_n(\mathbb{R})$ besteht. Was ist der Zentralisator von D in $SL_n(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Lassen Sie die Gruppe $SO(3)$ wie üblich auf dem $\mathbb{R}^3$ durch Matrizenmultiplikation operieren. Zeigen Sie, dass der Stabilisator von $e_1 = (1, 0, 0)^t$ isomorph ist zu $SO(2)$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Betrachten Sie die Operation der $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$, die durch die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d}$$

gegeben ist.

(1) Zeigen Sie, dass $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$ ist, falls $z \in \mathcal{H}$.

(2) Berechnen Sie den Stabilisator von $i \in \mathcal{H}$. Lassen Sie $SL_2(\mathbb{Z})$ in analoger Weise operieren. Was ist $SL_2(\mathbb{Z})_i$?

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Es sei X eine nichtleere Menge. Operiert die symmetrische Gruppe $S(X)$ transitiv und treu auf X?

Ja ☐ Nein ☐ Ist G eine Gruppe mit 81 Elementen, die auf einer 50 elementigen Menge operiert. Hat die Operation dann mindestens einen Fixpunkt?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei G eine Gruppe und X eine G-Menge. Ist der Stabilisator eines Elementes $x \in X$, G_x, immer eine normale Untergruppe in G?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei G eine Gruppe und X eine G-Menge. Kann es dann zu verschiedenen Elementen x_1, x_2 aus X Gruppenelemente g_1, g_2 aus G geben mit $g_1 x_1 = g_2 x_2$?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei $\sigma_i \in \Sigma_n$ die Permutation, die nur i und $i+1$ vertauscht für $1 \leqslant i \leqslant n-1$ und $n \geqslant 3$. Gilt dann $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1}$ für $i < n-1$?