Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 3 Abgabetermin: 26. November 2020

Aufgabe 1 (1 + 2 + 1 Punkte)

Sind N und H Gruppen, so ist eine Gruppenerweiterung von N durch H eine Folge von Gruppen und Gruppenhomomorphismen $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$, so dass gilt:

- φ ist ein Monomorphismus,
- π ist ein Epimorphismus und
- der Kern von π ist gleich dem Bild von φ.

(1) Zeigen Sie, dass jedes semidirekte Produkt $G = N \rtimes H$ eine Gruppenerweiterung gibt.

(2) Umgekehrt: Ist $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$ eine Gruppenerweiterung und gibt es einen Homomorphismus $s \colon H \to G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$, so ist G zu $N \rtimes H$ isomorph.

(3) Zeigen Sie, dass $GL_n(k)$ isomorph ist zum semidirekten Produkt der Gruppen $SL_n(k)$ und $k\backslash\{0\}$.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$ in $O(2)$. Sie wissen, dass R eine zyklische Gruppe der Ordnung n erzeugt.

(1) Bestimmen Sie $(RS)^2$. Beschreiben Sie die Elemente R^i und SR^i als Drehungen bzw Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$ und geben Sie die Drehwinkel und Spiegelachsen an.

(2) Es sei $G < O(2)$ die Untergruppe, die aus allen möglichen Verknüpfungen der Elemente S und R besteht. Zeigen Sie, dass G das semidirekte Produkt der Gruppen $\langle R\rangle$ und $\langle S\rangle$ ist und dass G $2n$ Elemente hat.

Die Gruppe G heißt Diedergruppe der Ordnung $2n$ und wird häufig mit D_{2n}, manchmal aber auch mit D_n, bezeichnet.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es seien $G_1, \dots, G_n$ Gruppen und $\prod_{i=1}^n G_i$ ihr direktes Produkt. Wir bezeichnen mit π_j die Projektion $\pi_j \colon \prod_{i=1}^n G_i \to G_j, (g_1, \dots, g_n) \mapsto g_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Zeigen Sie, dass das direkte Produkt die folgende universelle Eigenschaft hat: Ist H eine Gruppe und ist $f_i : H \to G_i, i = 1, \dots, n$ eine Familie von Homomorphismen, so gibt es genau einen Homomorphismus $f \colon H \to \prod_{i=1}^n G_i$ mit $\pi_j \circ f = f_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Kann das Produkt zweier Gruppen $G_1 \times G_2$ abelsch sein, obwohl G_1 nicht abelsch ist?

Ja ☐ Nein ☐ Kann die symmetrische Gruppe auf drei Elementen Σ_3 das Produkt zweier Gruppen $G_1 \times G_2$ sein, so dass weder G_1 noch G_2 die triviale Gruppe ist?

Ja ☐ Nein ☐ Sind $\varphi_1 : G_1 \to G_1'$ und $\varphi_2 : G_2 \to G_2'$ Homomorphismen. Es sei $\varphi_1 \times \varphi_2$ die Abbildung, die ein $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ auf $(\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2))$ abbildet. Ist dann $\mathrm{kern}(\varphi_1 \times \varphi_2) = \mathrm{kern}(\varphi_1) \times \mathrm{kern}(\varphi_2)$?

Ja ☐ Nein ☐ Es seien A_1 und A_2 zwei nicht-triviale abelsche Gruppen und $G = A_1 \rtimes A_2$ sei ein semidirektes Produkt von A_1 und A_2. Ist G dann immer abelsch?

Ja ☐ Nein ☐ Sind Produkte zyklischer Gruppen immer zyklisch?