Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 2 Abgabetermin: **19. November 2020**

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

- Es sei K eine Gruppe der Ordnung 4, die nicht zyklisch ist. Es sei $K = \{e, a_1, a_2, a_3\}$ mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass jedes der Elemente a_i Ordnung zwei hat und dass $a_i a_j = a_k$ für alle Permutationen i, j, k von $1, 2, 3$ gilt.
- Finden Sie eine Untergruppe der Permutationsgruppe auf 4 Elementen, Σ_4, die zu K isomorph ist.

Die Gruppe K heißt die *Kleinsche Vierergruppe*.

Aufgabe 2 (1 + 2 + 1 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und $Z(G)$ ihr Zentrum. Zeigen Sie

(1) Die Gruppe der inneren Automorphismen von G ist isomorph zu $G/Z(G)$.
(2) Ist die Automorphismengruppe von G, $\mathrm{Aut}(G)$, zyklisch, so ist G abelsch.
(3) Ist die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 3 (2 + 1 + 1 Punkte)

(1) Es sei $N \lhd G$ und $\pi\colon G \to G/N$ sei die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass die Zuordnungen $H \mapsto H/N$ und $K \mapsto \pi^{-1}(K)$ Bijektionen ergeben zwischen der Menge

$$\mathfrak{U}_N := \{H < G, N \subset H\}$$

der Untergruppen von G, die N enthalten, und der Menge aller Untergruppen von G/N,

$$\mathfrak{U}(G/N) := \{K < G/N\}.$$

(2) Beweisen Sie, dass diese Bijektionen normale Untergruppen wiederum auf normale Untergruppen abbilden.
(3) Finden Sie ein Beispiel für eine Gruppe G, $N \lhd G$ und $K \lhd N$, so dass K keine normale Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Es sei K ein Körper und $n > 1$. Es sei $(-)^t\colon GL_n(K) \to GL_n(K)$ die Abbildung, die einer invertierbaren Matrix A die transponierte Matrix A^t zuordnet, d. h. ist der Eintrag von A an der Stelle (i, j) a_{ij} so ist der Eintrag von A^t an der Stelle (i, j) gleich a_{ji}. Ist $A \mapsto A^t$ ein Gruppenhomomorphismus, wenn wir auf $GL_n(K)$ die Gruppenstruktur betrachten, die durch Matrizenmultiplikation gegeben ist?

Ja ☐ Nein ☐ Gibt es für natürliche Zahlen $m > 0$ Homomorphismen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$, deren Bild nicht nur aus der Null besteht?

Ja ☐ Nein ☐ Sind Urbilder von Normalteilern unter Homomorphismen immer Normalteiler?

Ja ☐ Nein ☐ Sind Bilder von Normalteilern unter Homomorphismen immer Normalteiler?

Ja ☐ Nein ☐ Ist $H < G$ eine Untergruppe vom Index 2, ist H dann immer normal in G?