Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 12 Abgabetermin: 11. Februar 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass der einzige Körperautomorphismus der reellen Zahlen die identische Abbildung ist.

Aufgabe 2 (3 + 1 + 2 Punkte)

(1) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i))$.
(2) Was ist $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}))$ und warum?
(3) Es sei $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $X^2 + X + 1$ ist. Wie viele Elemente hat $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_2}(K)$?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

- Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_7[X]/(X^3 - 2)$ normal ist über $\mathbb{F}_7$.
- Beweisen oder widerlegen Sie, dass jede Körpererweiterung $K \subset L$ mit $[L : K] = 2$ normal ist.

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Es sei L ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]\setminus K$ vom Grad n. Gilt dann immer $n! \geqslant [L : K]$?

Ja ☐ Nein ☐ Sind $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen. Folgt aus der Tatsache, dass $K \subset M$ normal ist, dass $K \subset L$ normal ist?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung und $K_0 = K \cap \mathbb{R}$. Ist dann immer $[K : K_0] \leqslant 2$?

Ja ☐ Nein ☐ Kann es einen Körperhomomorphismus von $\mathbb{F}_7[X]/(X^3 - 2)$ nach $\mathbb{Q}(i)$ geben?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei $\mathbb{F}_p(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[X]$ (p ist wie immer eine Primzahl) und es sei $\varphi\colon \mathbb{F}_p(X) \to \mathbb{F}_p(X)$ die Abbildung, die eingeschränkt auf $\mathbb{F}_p$ die Identität ist und die durch $\varphi(X) = X + 1$ gegeben ist. Ist dies ein Körperhomomorphismus?