Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 11 Abgabetermin: 4. Februar 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sind $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ die einzigen echten Zwischenerweiterungen zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (1 + 2 + 1 Punkte)

(1) Beweisen Sie, dass jeder endliche Körper p^n Elemente für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n hat.
(2) Es sei $\zeta_5 = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$. Was ist der Körpergrad $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}]$ und warum?
(3) Entscheiden und begründen Sie, ob die Elemente $\cos(2\pi/5)$ und $\sin(2\pi/5)i$ Elemente von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ sind.

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)

(1) Überlegen Sie sich, ob es für jede natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ eine einfache Körpererweiterung $\mathbb{Q}(a_m)$ gibt mit $[\mathbb{Q}(a_m) : \mathbb{Q}] = m$.
(2) Zeigen Sie, dass für eine Folge $p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschiedener Primzahlen p_i gilt, dass $\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$. Was ist der Körpergrad von $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$ und über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Kann ein Körper gleichzeitig $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p prim als Primkörper haben?
Ja ☐ Nein ☐ Ist jeder Körper Körpererweiterung seines Primkörpers?
Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Integritätsbereich und ein Unterring eines Körpers K. Ist dann immer der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ isomorph zu einem Unterkörper von K?
Ja ☐ Nein ☐ Ist $\mathbb{Q}(i)$ isomorph zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum?
Ja ☐ Nein ☐ Es seien $K \subset L$ und $K \subset L'$ Körpererweiterungen. Folgt aus $[L : K] = [L' : K]$, dass L und L' als Körper isomorph sind?