Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2020/21

Blatt 10 Abgabetermin: 28. Januar 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sie wissen, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring sein kann. Geben Sie ein Ideal I in $\mathbb{Z}[X]$ an, das kein Hauptideal ist, und weisen Sie auch nach, dass es keins ist. (Wenn Sie eins gefunden haben, finden Sie dann auch unendlich viele?)

Aufgabe 2 (3 + 2 + 1 Punkte)

(1) Es sei K ein Körper. Eine Funktion $f\colon K \to K$ heißt *Polynomfunktion*, falls es ein Polynom $g \in K[X]$ gibt mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$. Zeigen Sie, dass jede beliebige Funktion eine Polynomfunktion ist, falls K endlich ist.
(2) Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^4 + 1$. Ist f irreduzibel als Element in $\mathbb{Z}[X]$?
(3) Sie können f auch als Element in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ auffassen für alle Primzahlen p. Ist f in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel?

Aufgabe 3 (1 + 2 Punkte)

(1) Es sei K ein Körper. Argumentieren Sie, warum $K[X, Y]$ zwar faktoriell, aber kein Hauptidealring ist.
(2) Es sei K wieder ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ nicht faktoriell ist.

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Ist $X^4 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Integritätsbereich und $|R| < \infty$. Ist R dann ein Körper?
Ja ☐ Nein ☐ Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}_{(p)}$ sei die Lokalisierung an $S = \mathbb{Z}\backslash(p)$. Hat dann der Restklassenring $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}$ mehr Elemente als $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Integritätsbereich mit unendlich vielen Elementen und es seien f und g zwei Polynome in $R[X]$ mit $f \neq g$. Kann dann für alle $b \in R$ gelten, dass $f(b) = g(b)$?
Ja ☐ Nein ☐ Ist $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ zyklisch?