Einige Beispiele zur Vorlesung

1. Die Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$

Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ ist separabel, weil die Charakteristik von $\mathbb{Q}$ null ist. Sie ist normal, weil $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ ist. Also liegt hier eine Galoiserweiterung vor und

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) : \mathbb{Q}] = |G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)/\mathbb{Q})|.$$

Wie bestimmen zunächst die Galoisgruppe. Ist f ein $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, so muss f $\sqrt[3]{2}$ wiederum auf ein Element abbilden, welches zur dritten Potenz 2 ergibt. Ebenso muss f das Element ζ_3 auf eine primitive dritte Einheitswurzel abbilden. Damit haben wir die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}: &\quad \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}, &\quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3,\\
\alpha_0: &\quad \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}, &\quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3^2,\\
\alpha_1: &\quad \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta_3, &\quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3,\\
\alpha_2: &\quad \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta_3^2, &\quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3,\\
\alpha_1': &\quad \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta_3, &\quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3^2,\\
\alpha_2': &\quad \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta_3^2, &\quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3^2.
\end{aligned}$$

Dann haben α_0, α_1' und α_2' jeweils Ordnung 2 und α_1 und α_2 haben Ordnung 3. Die Gruppe ist nicht abelsch, also ist

$$G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)/\mathbb{Q}) \cong \Sigma_3.$$

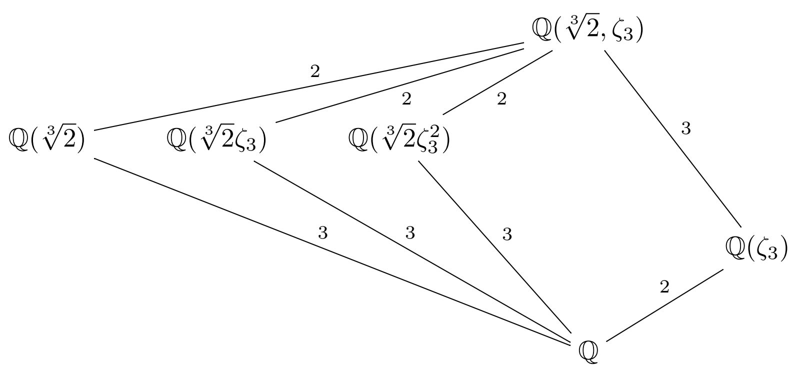
Hier identifizierend wir α_0 mit (23), α_1 mit (123), α_2 mit (132), α_1' mit (12) und α_2' mit (13).

Nach der Galoiskorrespondenz wissen wir, dass es genau zu jeder Untergruppe $H < \Sigma_3$ einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K(H) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ gibt, wobei $K(H)$ der Fixkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^H$ ist.

Die Untergruppen der Σ_3 sind $\{\mathrm{id}_{\mathbf{3}}\}$, $H_1 = \langle(12)\rangle$, $H_2 = \langle(13)\rangle$, $H_3 = \langle(23)\rangle$, $K = \langle(123)\rangle = \langle(132)\rangle$ und Σ_3.

Dem entsprechen die Fixkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^{\{\mathrm{id}_{\mathbf{3}}\}}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\zeta_3^2) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^{\langle(12)\rangle}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^{\langle(13)\rangle}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^{\langle(23)\rangle}$, $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^{\langle(123)\rangle}$ und $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)^{\Sigma_3}$.

Im folgenden Diagramm der Fixkörper steht an den Strichen jeweils der Körpergrad:



Hier ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_3)$ wiederum eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, weil $\langle(123)\rangle \lhd \Sigma_3$. Zeichnen Sie zur Übung das entsprechende Diagramm der Untergruppen!

2. Die Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$

Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ ist wiederum eine Galoiserweiterung. Sie hatten sich überlegt, dass die $\mathbb{Q}$-Automorphismengruppe die D_8 ist erzeugt von

$$D(i) = i, D(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5}i \text{ und } S(i) = -i, S(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5}.$$

Welche Untergruppen gehören mittels der Galoiskorrespondenz zu den Zwischenkörpern

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i), &\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i), \\ \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}), &\quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}i), \\ \mathbb{Q}(\sqrt{5}), &\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}i), \\ \mathbb{Q}(i), &\quad \mathbb{Q}? \end{aligned}$$

Sind das alle? Was ist mit $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}\frac{1+i}{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}\frac{1-i}{2})$?

3. Beispiele zum Klassifikationssatz der endlich-erzeugten abelschen Gruppen

Wald- und Wiesenbeispiel. Bei konkreten Berechnungen zum Beispiel von Invarianten in der Topologie kommen häufig Gruppen der folgenden Form vor:

Nehmen Sie an, Sie haben eine abelsche Gruppe A, die von a, b, c und d erzeugt ist und welche genau die Relationen

$$3a + 9b - 3c = 0 \text{ und } 4a + 2b - 2d = 0$$

erfüllt.

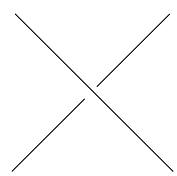
Es sei $F \cong \mathbb{Z}^4$ die freie abelsche Gruppe auf vier Erzeugern x, y, z, t und wir betrachten die Untergruppe H, die von $3(x + 3y - z)$ und $2(2x + y - t)$ erzeugt wird.

Die Gruppe A ist isomorph zur Faktorgruppe

$$A = F/H \text{ und } F/H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

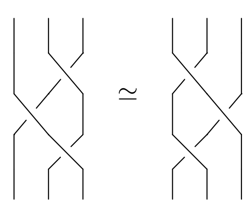
Überlegen Sie sich dazu, dass die Menge $\{x, y, 2x + y - t, x + 3y - z\}$ ebenfalls eine Basis von F ist.

Zopfgruppen. Eine wichtige Klasse von Gruppen sind die Zopfgruppen. Stellen Sie sich den Baustein eines Zopfes vor:



Nehmen wir jetzt einen Zopf auf n Strängen ($n \geqslant 2$), der diesen Baustein auf den Strängen i und $i+1$ hat und ansonsten gerade herunter läuft. Das ist ein Erzeuger der n-ten Zopfgruppe B_n und er wird meistens mit σ_i bezeichnet. Sie verknüpfen Zöpfe, indem Sie sie aneinanderhängen.

Es gilt $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$:



Es gelten auch noch die Relationen $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, falls $|i - j| \geqslant 2$ ist. Was ist B_2? Hier haben Sie nur zwei Stränge und Sie zählen, wie oft diese Stränge getwistet sind. Dies gibt $B_2 \cong \mathbb{Z}$.

Was ist $B_n/[B_n, B_n]$? Sie wissen, dass diese Gruppe abelsch ist. Sie wissen außerdem, dass sie endlich erzeugt ist, weil B_n es war. Sie wissen also mit dem Klassifikationssatz a priori was in Frage kommen kann für $B_n/[B_n, B_n]$. Da B_2 schon abelsch ist, ist $B_2/[B_2, B_2] \cong \mathbb{Z}$.

Für $n > 2$ sind je zwei Erzeuger zueinander konjugiert: Sie können die Relation $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ umformen zu

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_i\sigma_{i+1})^{-1}.$$

Damit haben alle Erzeuger das gleiche Bild in $B_n/[B_n, B_n]$. Indem Sie $B_n/[B_n, B_n] \to \mathbb{Z}$, $\sigma_i[B_n, B_n] \mapsto 1$ setzen, erhalten Sie eine Surjektion und es gilt für alle $n \geqslant 2$

$$B_n/[B_n, B_n] \cong \mathbb{Z}.$$

4. Eine Gruppe der Ordnung 48

Nehmen wir erst einmal an, wir haben eine Gruppe G der Ordnung 48 gegeben.

Was wissen Sie alles? Für jede Untergruppe H von G gilt:

$$|H| \mid |G| = 48 = 2^4 \cdot 3.$$

also kommen Untergruppen mit Mächtigkeit

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$$

in Frage.

Was sagen die Sylowsätze über G? Wir habe nur die Primfaktoren 2 und 3, also auch nur 2- und 3-Sylowuntergruppen:

Ist s_2 wieder die Anzahl der 2-Sylowuntergruppen und s_3 entsprechend die der 3-Sylowuntergruppen, so erhalten wir:

$$s_2 \mid 3, \quad s_2 \equiv 1 \bmod 2, \qquad s_3 \mid 16, \quad s_3 \equiv 1 \bmod 3.$$

Also kann $s_2 \in \{1, 3\}$ und $s_3 \in \{1, 4\}$ sein. Sie hatten sich in einer Übungsaufgabe (Blatt 3, Aufgabe 3) überlegt, dass G nicht einfach ist. Aber das war einer der Fälle, die durch Widerspruchsbeweis funktionierten. Wir kommen so also nicht weiter.

Sind wir zu doof? Nein: Es gibt 52 zueinander nicht-isomorphe Gruppen mit 48 Elementen.

Spielen wir den Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen durch und nehmen an, dass G abelsch ist. Dann ist G isomorph zu $G_2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und G_2 ist die 2-primäre Komponente von G. Hierfür haben Sie viele Möglichkeiten, weil $|G_2| = 16$ ist, also:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} &\times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &\times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Lassen wir nicht-abelsche Gruppen zu, dann wird das Ganze natürlich noch interessanter. Sie könnten zum Beispiel $D_8 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ oder $D_8 \times \Sigma_3$ nehmen.

Es gibt eine ganz andere Gruppe mit 48 Elementen, die $GL_2(\mathbb{F}_3)$. Für die erste Spalte können Sie alle Vektoren in $\mathbb{F}_3^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ nehmen. Für die zweite Spalte bleiben dann noch die Vektoren übrig, die keine Vielfachen des ersten sind. Das gibt genau 48.

Sie wissen schon, dass Sie $GL_2(\mathbb{F}_3)$ als semi-direktes Produkt schreiben können, weil Sie die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow SL_2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_3) \xrightarrow{\det} \mathbb{F}_3^\times \longrightarrow 1$$

kennen, die spaltet.

Also ist $GL_2(\mathbb{F}_3) \cong SL_2(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{F}_3^\times$ mit $|\mathbb{F}_3^\times| = 2$ und $|SL_2(\mathbb{F}_3)| = 24$. Es stellt sich heraus, dass $SL_2(\mathbb{F}_3)$ wiederum ein semi-direktes Produkt ist, nämlich

$$SL_2(\mathbb{F}_3) \cong Q_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Hierbei ist Q_8 die Quaternionengruppe:

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}.$$

Die Gruppenstruktur ist so definiert, wie auf der Basis der Quaternionen (s. Blatt 8 Aufgabe 3).

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt eine zyklische Gruppe der Ordnung 3.

Was erzeugen die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?