Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Probeklausur

Zur eigenständigen Bearbeitung in der vorlesungsfreien Zeit. In der Klausur hätten Sie für einen vergleichbaren Stoffumfang 150 Minuten zur Verfügung.

Aufgabe 1 [3+1+1+1 Punkte]

Begründen Sie in dieser Aufgabe jeweils kurz Ihre Antworten.

a) Es seien A und B beliebige $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K. Nehmen Sie an, dass die Matrizen invertierbar sind, falls ein $(-)^{-1}$ in der Formel auftaucht. Gelten dann immer die folgenden Formeln?

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(2) $(AB)^t = A^t B^t$

(3) $\det(A^{-1})^t = -\det A^{-1}$

b) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension 8 und $U \subset V$ ein Untervektorraum der Dimension 2. Weiterhin seien V_1, V_2 K-Vektorräume der Dimension 2 beziehungsweise 5. Bestimmen Sie die Dimension des K-Vektorraums

$$\mathrm{Hom}_K(V/U, V_1 \oplus V_2).$$

c) Was ist das multiplikative Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{Q})$?

d) Es sei $f\colon K^4 \to K$ die K-lineare Abbildung, die gegeben ist durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 x_i$.

Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von f und die Dimension des Bildes von f.

Aufgabe 2 [3 Punkte]

Wir betrachten die lineare Abbildung $f = f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Elemente des $\mathbb{R}^3$ notieren wir als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Die Abbildung f_1 strecke die x_2-Achse mit dem Faktor $\sqrt{2}$ und spiegele die (x_1, x_3)-Ebene an der x_1-Achse und f_2 sei die Projektion $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Es sei $S_1 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $S_2 = (e_1, e_2)$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Leiten Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen f_1, f_2 und f bezüglich der passenden Standardbasen her.

Aufgabe 3 [1 Punkt]

Ist der Ring $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 [2 Punkte]

Ist die Familie $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ linear unabhängig im $\mathbb{C}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 [1+2 Punkte]

Es seien V und W K-Vektorräume und $f \colon V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung. Definieren Sie, was der Kern von f ist, und zeigen Sie, dass das Bild von f ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe 6 [2 Punkte]

Es sei V ein K-Vektorraum und $f \colon V \to V$ sei eine K-lineare Abbildung. Gilt dann, dass f surjektiv ist, falls es injektiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 [2+1 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht der affine Lösungsraum aus? Welche Dimension hat er?

Aufgabe 8 [2 Punkte]

Betrachten Sie $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \subset \mathbb{F}_2^3$. Geben Sie (ohne Rechnung) eine Basis von $\mathbb{F}_2^3/U$ an.

Notieren Sie Elemente in $\mathbb{F}_2^3/U$ bitte als Äquivalenzklassen $\left[\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}\right]$ von Vektoren $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{F}_2^3$.

Aufgabe 9 [1+1 Punkte]

Es sei $S = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{A}$ sei die geordnete Basis

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sind die Basen S und $\mathcal{A}$ gleich orientiert?

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{A}}^{S}$.

Aufgabe 10 [3 Punkte]

Benutzen Sie ein Determinantenkriterium um zu entscheiden, für welche $x \in \mathbb{Q}$ die Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \right)$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 11 [2 Punkte]

Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ sei ein Untervektorraum. Beweisen Sie, dass gilt

$$V \cong U \oplus (V/U).$$