Mathematik IV für Studierende der Physik
Vorlesungsskript

Birgit Richter [*]
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
`www.math.uni-hamburg.de/home/richter` [†]

Hamburg, Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

---

[*] mit Dank an die Dozent*innen der Vorjahre
[†] Version vom 20. April 2026

1 Tensorprodukte und Differentialformen

1.1 Tensorprodukte

Wir wiederholen zunächst ein Konzept aus der Linearen Algebra.

Definition 1.1.1
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien V, W und X gegebene $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist eine $\mathbb{K}$-bilineare Abbildung *eine Abbildung*

$$\alpha\colon V \times W \to X,$$

die in beiden Argumenten $\mathbb{K}$-linear ist, für die also $\alpha(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda\alpha(v, w) + \lambda'\alpha(v', w)$ und $\alpha(v, \lambda w + \lambda' w') = \lambda\alpha(v, w) + \lambda'\alpha(v, w')$ für alle $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ und $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ gilt.

Damit ist dann für jede lineare Abbildung $\phi\colon X \to X'$ auch die Abbildung $\phi\circ\alpha\colon V\times W \to X'$ bilinear. Wir stellen uns die Frage, ob es für je zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W einen *universellen* $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \otimes W$ mit einer *universellen* bilinearen Abbildung $V \times W \to V \otimes W$ gibt, so dass *alle* anderen bilinearen Abbildungen $V \times W \to Z$ durch lineare Abbildungen $V \otimes W \to Z$ beschrieben werden können.

Definition 1.1.2
Das Tensorprodukt *zweier $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W ist ein Paar, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \otimes W$ und einer bilinearen Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \kappa\colon & V \times W & \to & V \otimes W \\ & (v, w) & \mapsto & v \otimes w \end{array}$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jeder bilinearen *Abbildung*

$$\alpha\colon V \times W \to X$$

gibt es genau eine lineare *Abbildung $\phi_\alpha\colon V \otimes W \to X$ mit*

$$\alpha = \phi_\alpha \circ \kappa.$$

Wir drücken dies durch das folgende Diagramm aus:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists!\phi_\alpha"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Betrachtung 1.1.3.

1. Damit ist die Theorie bilinearer Abbildungen auf die Theorie linearer Abbildungen zurückgeführt.

2. Wir zeigen zunächst, dass das Tensorprodukt, wenn es denn existiert, bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig ist. Angenommen, es gäbe zwei Vektorräume $V \otimes W$ und $V \tilde{\otimes} W$ und zwei universelle bilineare Abbildungen

   $$\kappa\colon V \times W \to V \otimes W \qquad \tilde{\kappa}\colon V \times W \to V \tilde{\otimes} W.$$

   Man benutzt die universelle Eigenschaft von κ und findet für die spezielle bilineare Abbildung $\tilde{\kappa}$ eine eindeutige lineare Abbildung $\phi_{\tilde{\kappa}}\colon V \otimes W \to V \tilde{\otimes} W$ mit $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa = \tilde{\kappa}$.

Durch Vertauschen der Rollen von κ und $\tilde{\kappa}$ erhält man ebenso eine lineare Abbildung $\phi_\kappa \colon V\tilde{\otimes}W \to V\otimes W$ mit $\phi_\kappa \circ \tilde{\kappa} = \kappa$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\phi_{\tilde{\kappa}}"] \\
V \times W \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[r, "\tilde{\kappa}"] \arrow[dr, "\kappa"'] & V\tilde{\otimes}W \arrow[d, dashed, "\phi_\kappa"] \\
 & V \otimes W
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Abbildungen $\kappa = \mathrm{id}_{V\otimes W} \circ \kappa$ und $\phi_\kappa \circ \phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa$ beschreiben die gleiche bilineare Abbildung $V\times W \to V\otimes W$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft folgt $\phi_\kappa \circ \phi_{\tilde{\kappa}} = \mathrm{id}_{V\otimes W}$. Durch Vertauschen der Rollen von κ und $\tilde{\kappa}$ folgt analog $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \phi_\kappa = \mathrm{id}_{V\tilde{\otimes}W}$.

3. Zur Existenz: Wir betrachten $V \times W$ und $\mathbb{K}$ als Mengen und wir benutzen die Menge aller Abbildungen von $V \times W$ nach $\mathbb{K}$, $\mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K})$. Wir definieren eine Abbildung

$$\delta \colon V \times W \to \mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K}), \quad \delta(v_1, w_1)(v_2, w_2) := \begin{cases} 1, & v_1 = v_2 \text{ und } w_1 = w_2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei

$$U := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\delta(v, w), v \in v, w \in W\}.$$

Der Vektorraum U enthält also endliche Linearkombinationen von Abbildungen $\delta(v, w)$.

Wir wollen δ dazu zwingen, bilinear zu werden und bilden den Quotientenvektorraum

$$T := U/X,$$

wobei X der Untervektorraum von U ist, der von allen Elementen in U der Form

$$\delta(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda\delta(v_1, w) - \mu\delta(v_2, w) \text{ und } \delta(v, \lambda w_1 + \mu w_2) - \lambda\delta(v, w_1) - \mu\delta(v, w_2) \quad (1)$$

erzeugt wird, also $X = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(M)$, wobei M die Menge

$$\{\delta(\lambda v_1 + \mu v_2, w) - \lambda\delta(v_1, w) - \mu\delta(v_2, w), \delta(v, \lambda w_1 + \mu w_2) - \lambda\delta(v, w_1) - \mu\delta(v, w_2)\}$$

mit $v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $w, w_1, w_2 \in W$ ist. Es sei $\pi \colon U \to U/X = T$ die kanonische Projektion. Nach Konstruktion ist T ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi\circ\delta \colon V\times W \to T$ ist bilinear.

Wir behaupten, dass das Paar $(T, \pi \circ \delta)$ ein Tensorprodukt von V und W ist. Wir zeigen dies, indem wir nachweisen, dass $(T, \pi\circ\delta)$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes hat.

Sei dazu also $\alpha \colon V \times W \to Y$ eine beliebige bilineare Abbildung in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum Y. Jedes Element in T läßt sich schreiben als $\pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(v_i, w_i)\right)$. Wir setzen $\phi_\alpha \colon T \to Y$ an als

$$\phi_\alpha(\pi(\delta(v, w))) := \alpha(v, w)$$

und allgemein

$$\phi_\alpha\left(\pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\delta(v_i, w_i)\right)\right) := \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha(v_i, w_i).$$

Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Ist x ein Element aus X, so ist x eine Linearkombination von Elementen wie in (1). Da aber α bilinear ist, gilt

$$\alpha(\lambda u_1+\mu u_2, v)-\lambda\alpha(u_1, v)-\mu\alpha(u_2, v) = 0 \text{ und } \alpha(u, \lambda v_1+\mu v_2)-\lambda\alpha(u, v_1)-\mu\alpha(u, v_2) = 0,$$

so dass $\alpha|_X = 0$ gilt.

Damit ist $\phi_\alpha \colon W/X \to Y$ wohldefiniert und linear. Es gilt nach Konstruktion

$$\phi_\alpha \circ \pi \circ \delta = \alpha,$$

weil wir $\phi_\alpha \circ \pi \circ \delta(v, w)$ genau als $\alpha(v, w)$ definiert hatten.

Da die Elemente $\delta(v, w)$ den Vektorraum U erzeugen, erzeugen die Elemente $\pi(\delta(v, w))$ den Quotientenvektorraum. Da wir verlangen, dass $\phi_\alpha \circ \pi \circ \delta = \alpha$ gilt, ist ϕ_α damit eindeutig festgelegt.

4. Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und sind V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}} V = m < \infty$ und $\dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$, so ist
$$\dim_{\mathbb{K}} V \otimes W = m \cdot n.$$
Es sei $\mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W. Dann ist $(v_i \otimes w_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $V \otimes W$: Nach Konstruktion von $V \otimes W$ sind die $(v_i \otimes w_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ linear unabhängig und sie erzeugen $V \otimes W$.

5. Die Elemente des Vektorraums $V \otimes W$ heißen *Tensoren*, die Elemente der Form $v \otimes w := \kappa(v, w)$ mit $v \in V$ und $w \in W$ *Tensorprodukte* oder reine Tensoren. Die Tensorprodukte erzeugen $V \otimes W$, aber nicht jedes Element von $V \otimes W$ ist das Tensorprodukt eines Vektors $v \in V$ und $w \in W$.

Bemerkung 1.1.4.

1. Sind V, W reelle oder komplexe Vektorräume und tragen überdies die Struktur eines Hilbertraums, so ist das Tensorprodukt $V \otimes W$ mit dem durch
$$\langle v \otimes w, v' \otimes w'\rangle = \langle v, v'\rangle \cdot \langle w, w'\rangle \quad \text{für alle } v, v' \in V \quad \text{und } w, w' \in W$$
definierten Skalarprodukt ein Skalarproduktraum. Im unendlichdimensionalen Fall ist dies aber *kein* Hilbertraum. Man kann aber $V \otimes W$ als metrischen Raum vervollständigen, indem man alle Cauchy-Folgen hinzunimmt und Cauchy-Folgen identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Man zeigt dann, das dieser Raum $V \hat{\otimes} W$ eine natürliche Struktur eines Hilbertraum trägt.

2. Es gilt dann für Räume quadratintegrabler Funktionen $L^2(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^q) \cong L^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$.

3. Wenn die Elemente der Hilberträume V und W Wellenfunktionen quantenmechanischer System beschreiben, so beschreiben Elemente des Hilbertraums $V \hat{\otimes} W$ Wellenfunktion des gekoppelten Systems. Tensorprodukte von Hilberträumen treten daher natürlich bei der Beschreibung von Systemen mehrerer Teilchen auf. (Bei identischen Teilchen muss man sich auf Unterräume einschränken, um die Bose- oder Fermi-Statistik des Teilchens zu berücksichtigen.)

Wir definieren nun das Tensorprodukt zweier linearer Abbildungen.

Betrachtung 1.1.5.
Je zwei $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen

$$\phi\colon V \to V' \qquad \psi\colon W \to W'$$

induzieren eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung der Tensorprodukte

$$\phi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'.$$

Dazu betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\phi\times\psi"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists!\phi\otimes\psi"] \\ V' \times W' \arrow[r, "\kappa'"] & V' \otimes W' \end{tikzcd} \tag{2}$$

Da die Abbildung $\kappa' \circ (\phi \times \psi)$ bilinear ist, existiert nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi \otimes \psi$ mit $(\phi \otimes \psi) \circ \kappa = \kappa' \circ (\phi \times \psi)$. Diese erfüllt also

$$(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w) \quad \text{für } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Betrachtung 1.1.6.
Wir wollen diese Strukturen nun auch in Koordinaten bezüglich Vektorraumbasen betrachten. Sei $\mathbb{K}$ ein fester Körper.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis. Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ in dieser Basis als

   $$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad \text{mit } x^i \in \mathbb{K}.$$

   Man nennt manchmal einen Vektor $x \in V$ einen *kontravarianten Vektor* in V.

2. Sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ der Dualraum von V, also der Vektorraum der Linearformen auf V. Die zur Basis $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ duale Basis $\mathcal{B}^{(V^*)} = (e^1, \dots, e^n)$ besteht aus den Linearformen e^i mit $e^i(e_j) = \delta_{ij}$. Wir schreiben Linearformen, also Vektoren $\beta \in V^*$ im Dualraum, als Linearkombination

   $$\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^i \quad \text{mit } \beta_i \in \mathbb{K}.$$

   Man nennt manchmal dann auch $\beta \in V^*$ einen *kovarianten Vektor* zu V.

3. Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ und $\mathcal{B}^{(W)} = (e'_1, \dots, e'_m)$. Eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ beschreiben wir durch die Bilder der Basisvektoren

   $$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a^i_j e'_i;$$

   (a^i_j) ist die darstellende Matrix von A. Oft vereinbart man, dass über gleiche oben und unten stehende Indizes summiert werden muss, und lässt das Summenzeichen weg: $Ae_j = a^i_j e'_i$ Dies ist die *Einsteinsche Summationskonvention*, die in Differentialgeometrie und allgemeiner Relativitätstheorie häufig verwendet wird.

4. Seien V, V' und W, W' endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi\colon V \to V'$ und $\psi\colon W \to W'$ lineare Abbildungen. Seien $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}^{(V')} = (e'_1, \dots e'_m)$ sowie $\mathcal{B}^{(W)} = (f_1, \dots, f_p)$, $\mathcal{B}^{(W')} = (f'_1, \dots f'_q)$ Basen. Sind dann die darstellenden Matrizen gegeben durch
$$\phi(e_i) = a_i^k e'_k \quad \text{und} \quad \psi(f_i) = b_i^\ell f'_\ell,$$
so folgt aus dem kommutierenden Diagramm (2) in Betrachtung 1.1.5
$$(\phi \otimes \psi)(e_i \otimes f_j) = a_i^k b_j^l e'_k \otimes f'_\ell$$
und folglich für einen allgemeinen Tensor $x^{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes V'$
$$(\phi \otimes \psi)(x^{ij} e_i \otimes f_j) = x^{ij} a_i^k b_j^\ell e'_k \otimes f'_\ell.$$
Die Beschreibung von $\phi \otimes \psi$ in Koordinaten ist also
$$\phi \otimes \psi\colon (x^{ij}) \mapsto (a_i^k b_j^\ell x^{ij}).$$

Bemerkungen 1.1.7.

1. Aus der Bilinearität von κ folgt, dass sich auch das Tensorprodukt von Abbildungen bilinear verhält:
$$\begin{aligned}(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) \otimes \psi &= \lambda_1\phi_1 \otimes \psi + \lambda_2\phi_2 \otimes \psi,\\ \phi \otimes (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) &= \phi \otimes \lambda_1\psi_1 + \phi \otimes \lambda_2\psi_2.\end{aligned}$$

2. Ebenso folgt für Vektorräume die Verträglichkeit mit direkten Summen:
$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W),$$
und analog im anderen Argument.

3. Man hat kanonische Isomorphismen
$$\begin{aligned} a_{U,V,W}\colon U \otimes (V \otimes W) &\to (U \otimes V) \otimes W\\ u \otimes (v \otimes w) &\mapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$
mit deren Hilfe man die $\mathbb{K}$-Vektorräume $U \otimes (V \otimes W)$ und $(U \otimes V) \otimes W$ identifizieren kann. Das Tensorprodukt ist dann assoziativ.

4. Die Skalarmultiplikation in V liefert kanonische Isomorphismen
$$\begin{array}{lcl} \mathbb{K} \otimes V & \xrightarrow{\sim} & V \\ \lambda \otimes v & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} V \otimes \mathbb{K} & \to & V \\ v \otimes \lambda & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$
mit Umkehrabbildung $v \mapsto 1 \otimes v$ bzw. $v \mapsto v \otimes 1$, mit deren Hilfe man den Grundkörper $\mathbb{K}$ als Eins unter dem Tensorprodukt auffassen kann.

5. Man hat kanonische Isomorphismen
$$\begin{aligned} c_{U,V}\colon U \otimes V &\to V \otimes U\\ u \otimes v &\mapsto v \otimes u, \end{aligned}$$
mit deren Hilfe man die Faktoren vertauschen kann. Es gilt $c_{V,U} \circ c_{U,V} = \mathrm{id}_{U \otimes V}$.

6. Benutzen wir das assoziative Tensorprodukt, so können wir zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V die *Tensoralgebra*
$$T(V) := V^{(0)} \oplus V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \ldots,$$
mit $V^{(0)} := \mathbb{K}$ und $V^{(j)} := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{j}$ mit j Faktoren, bilden. Durch das Produkt
$$\begin{array}{rcl} V^{(j)} \times V^{(\ell)} & \to & V^{(j+\ell)} \\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_j, w_1 \otimes \ldots \otimes w_\ell) & \mapsto & v_1 \otimes \ldots \otimes v_j \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_\ell \end{array}$$
wird $T(V)$ zu einer $\mathbb{K}$-Algebra, d.h. dass der gegebene $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Produkt versehen ist, das bezüglich der Vektoraddition distributiv ist. Genauer ist $T(V)$ eine $\mathbb{Z}_+$-graduierte assoziative $\mathbb{K}$-Algebra. Sie ist unendlich-dimensional, falls V nicht der Nullvektorraum ist. Die Tensoralgebra von Hilberträumen (und Unterräume davon) tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von Systemen der Quantenstatistik auf, bei denen die Teilchenzahl nicht fest ist.

Bemerkungen 1.1.8.

1. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung
$$\begin{array}{lcl} V^* \otimes W^* & \to & (V \otimes W)^* \\ \alpha \otimes \beta & \mapsto & (v \otimes w \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)) \end{array}$$
ein Isomorphismus.

2. Insbesondere können wir Bilinearformen auf $V \times W$ mit Linearformen auf $V \otimes W$, also Elementen in $(V \otimes W)^*$ identifizieren und somit durch Tensoren in $V^* \otimes W^*$ beschreiben. In der Beschreibung durch Komponenten treten zwei untere kovariante Indizes auf.

3. Wir hatten den Maßtensor einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ kennengelernt. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung. Sei für $u \in U$ das Bild $p := \varphi(u) \in M$ und $(\partial_1\varphi, \ldots, \partial_k\varphi)$ eine Basis des Tangentialraums T_pM. Dann liefert die Restriktion des euklidischen Skalarprodukts des umgebenden Raums $\mathbb{R}^n$ auf T_pM eine (positiv definite) Bilinearform $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ und somit einen Tensor in $(T_pM)^* \otimes (T_pM)^*$.

4. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung
$$\begin{array}{lcl} V^* \otimes W & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \alpha \otimes w & \mapsto & (v \mapsto \alpha(v)w) \end{array}$$
ein Isomorphismus. Insgesamt ermöglicht dies einen Kalkül für *endlich-dimensionale* Vektorräume, bei dem alle Homomorphismen – insbesondere multilineare Abbildungen und Multilinearformen – durch geeignete Tensoren beschrieben werden.

Bemerkungen 1.1.9.

1. Hat man in allen Vektorräumen eine Basis gewählt, so kann man Tensoren durch ihre Koordinaten beschreiben:
$(x^{i_1 \ldots i_k}{}_{j_1 \ldots j_\ell})$ beschreibt einen Tensor in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \otimes W_1^* \otimes \ldots \otimes W_\ell^*$.
Eine Basiswechselabbildung im ν-ten Faktor V_ν
$$e_i' = t_i^j e_j$$
führt dann für den Tensor zu neuen Koordinaten $(t_j^i x^{\cdots j \cdots}_{\cdots})$. Für kovariante Indizes ist entsprechend die zu $T = (t_i^j)$ transponierte Matrix zu nehmen.

2. Auf dem Raum der Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist die Spur eine wichtige Linearform:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}\colon \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \cong V^* \otimes V & \to & \mathbb{K} \\ x^i_j e^j \otimes e_i & \mapsto & x^i_j e^j(e_i) = \sum_i x^i_i = x^i_i \end{array}$$

Im Tensorkalkül setzt man also einen oberen und einen unteren Index gleich und summiert darüber. Diese Operation nennt man auch das *Verjüngen eines Tensors*. Auch ein Tensor mit mehr als einem oberen und unterem Index zum gleichen Vektorraum kann verjüngt werden; dies entspricht einer partiellen Spur.

Definition 1.1.10

1. *Eine* alternierende k-Form *auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$\omega\colon V^k \to \mathbb{K},$$

die in jedem Argument linear ist, also eine multilineare Abbildung ist, und die verschwindet, sobald wenigstens zwei Argumente gleich sind:

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0,$$

sobald es i, j mit $i \neq j$ gibt, so dass $v_i = v_j$.

2. *Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit $\Lambda^k V^*$ den Vektorraum aller alternierenden k-Formen $V^k \to \mathbb{K}$. Speziell setzt man $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K}$. Es ist $\Lambda^1 V^* = V^*$.*

Bemerkungen 1.1.11.

1. Eine alternierende Linearform kann durch eine lineare Abbildung $V^{(k)} \to \mathbb{K}$ beschrieben werden.

2. Ist die Charakteristik von $\mathbb{K}$ ungleich 2 (wie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so ist allgemeiner eine alternierende k-lineare Abbildung eine Abbildung

$$\alpha\colon V \times V \times \ldots \times V \to W$$

mit der Eigenschaft, dass für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ gilt:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{sign}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Charakteristik von $\mathbb{K}$ immer ungleich 2 ist.

Definition 1.1.12 *Das* k-fache äußere Produkt eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V *ist ein Vektorraum $\Lambda^k(V)$, zusammen mit einer k-multilinearen alternierenden Abbildung $\wedge\colon V \times \ldots \times V \to \Lambda^k V$, so dass es für jede k-lineare alternierende Abbildung $\alpha\colon V^k \to W$ genau eine lineare Abbildung $\phi_\alpha\colon \Lambda^k V \to W$ gibt, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \Lambda^k V \arrow[dd, dashed, "\exists! \phi_\alpha"] \\ V^k \arrow[ur, "\wedge"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Durch diese universelle Eigenschaft ist $\Lambda^k V$ bis auf eindeutige Isomorphie charakterisiert. Die Existenz des äußeren Produkts zeigt man, indem man den Vektorraum $\Lambda^k V = V^{\otimes k}/L$ mit

$$L := \operatorname{span}\big(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k - \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)} \mid \sigma \in \Sigma_k, v_j \in V\big)$$

betrachtet.

1. Wir schreiben
$$\wedge(v_1, \ldots, v_k) =: v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^k V.$$
Wir werden gleich diesen Ausdruck noch einmal anders für den Fall von Linearformen einführen, also für $\Lambda^k V^*$.
Da die Abbildung $\wedge \colon V^k \to \Lambda^k V$ alternierend ist, gilt
$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k = \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(k)}.$$

2. Eine alternierende k-Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V kann als ein Element (eines Unterraums) des $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V^{\otimes k})^*$ angesehen werden. Diese kann man natürlich als Elemente in der Komponente $(V \otimes \ldots \otimes V)^* \cong V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ der Tensoralgebra TV^* des Dualraums auffassen.

Allerdings ist das Produkt zweier alternierender k-Formen in der Tensoralgebra nicht mehr alternierend. Wir müssen daher für alternierende Formen ein anderes Produkt einführen.

Definition 1.1.13
Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ Linearformen. Wir definieren das äußere Produkt *oder* Dachprodukt *$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$ durch*

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) := \det\left((\varphi_\ell(v_j))_{1 \leq \ell, j \leq k}\right)$$

Bemerkung 1.1.14.
Man zeigt leicht: Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V^*, so bilden die Elemente $\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_k}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$.

Dazu betrachte eine zu (φ_i) duale Basis $(e_i)_i$ von V. Man zeigt dann, dass eine beliebige alternierende Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ sich eindeutig schreiben lässt als

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}.$$

Es folgt $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$ und $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = 0$ für $k > n$.

Satz 1.1.15.
Es gibt genau eine bilineare Abbildung (genannt *äußeres Produkt* oder *Dachprodukt*)

$$\begin{array}{rcl} \wedge \colon \Lambda^k V^* \times \Lambda^\ell V^* & \to & \Lambda^{k+\ell} V^* \\ (\omega, \sigma) & \mapsto & \omega \wedge \sigma, \end{array}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\ell) = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\ell)$$

für alle 1-Formen $\varphi_j, \psi_j \in V^*$.

Definition 1.1.16

1. *Wir definieren das* äußere Produkt *oder* Dachprodukt *alternierender Formen durch die Abbildung aus Satz 1.1.15. Speziell setzt man für $a \in \mathbb{K} = \Lambda^0 V^*$: $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a \cdot \omega$.*

2. *Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V nennt man die direkte Summe*

$$\Lambda V = \oplus_{k=0}^{\dim V} \Lambda^k V$$

die äußere Algebra *von V.*

Bemerkungen 1.1.17.

1. Die Dimension der äußeren Algebra eines Vektorraums V der Dimension $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ ist

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda V = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Insbesondere ist die äußere Algebra eines endlich-dimensionalen Vektorraums endlich-dimensional.

2. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass das Dachprodukt assoziativ ist,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

für alle $\omega_i \in \Lambda^{k_i}$ und alle Werte von $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Ferner ist das Dachprodukt alternierend: Für $\omega \in \Lambda^k V$ und $\sigma \in \Lambda^\ell V$ gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{k\ell} \sigma \wedge \omega. \tag{3}$$

3. Die äußere Algebra von Hilberträumen tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von fermionischen Vielteilchensystemen auf.

1.2 Differentialformen und der Stokessche Integralsatz

Wir folgen [F3, §19-§21].

Betrachtung 1.2.1.

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Bei der Einführung des Differentials hatten wir df als Abbildung

$$U \to (\mathbb{R}^n)^*, p \mapsto df(p) = df_p$$

aufgefasst. Für jedes $p \in U$ ist $\mathbb{R}^n$ der Tangentialraum T_pU der n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit U.

- Wir wollen im Folgenden die Tangentialräume T_pU für verschiedene p auseinanderhalten. Wenn wir die Vereinigung $\sqcup_{p\in U} T_pU$ bilden, so sei diese stets disjunkt:

$$\bigsqcup_{p\in U} T_pU = \bigcup_{p\in U} \{p\} \times T_pU.$$

Man nennt den Dualraum $T_p^*U := (T_pU)^*$ auch den *Kotangentialraum* von U in p. Ebenso betrachtet man wieder die disjunkte Vereinigung $\sqcup_{p\in U} T_p^*U$.

- Wir fassen jetzt das Differential df auf als Abbildung

$$U \to \sqcup_{p\in U} T_p^*U \text{ mit } p \mapsto df(p) \in T_p^*U,$$

wobei die Linearform $df(p) \in T_p^*U$ auf einem Tangentialvektor $v \in T_pU$ den Wert

$$df(p)(v) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot v_j$$

hat.

- Speziell betrachten wir für die Koordinatenfunktionen x_j jetzt die Differentiale $dx_j \colon U \to \sqcup_{p\in U} T_p^*U$. Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n \cong T_pU$; es gilt

$$dx_j(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \delta_{k,i} = \delta_{i,j}.$$

Also ist für jedes p die Menge $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ die zur kanonischen Basis $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n \cong T_pU$ duale Basis von $T_p^*U \cong \mathbb{R}^n$, und es gilt

$$df(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot dx_j(p).$$

Im Sinne der folgenden Definition ist das *totale Differential df* von f eine Differentialform erster Ordnung.

Definition 1.2.2
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer Differentialform *der Ordnung k oder kurz einer k-Form auf U versteht man eine Abbildung*

$$\omega \colon U \to \bigsqcup_{p\in U} \Lambda^k T_p^*U \textit{ mit } \omega(p) \in \Lambda^k T_p^*U.$$

Bemerkung 1.2.3.
Nach Bemerkung 1.1.14 ist für jedes $p \in U$ durch $dx_{j_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{j_k}(p)$, $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$ eine Basis von $\Lambda^k T_p^*U$ gegeben, und jede k-Form ω auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich also darstellen als

$$\omega(p) = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} f_{j_1\dots j_k}(p) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen $f_{j_1\dots j_k} \colon U \to \mathbb{R}$.

Definition 1.2.4
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} f_{j_1\dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

eine k-Form auf U.

1. *Die Differentialform ω heißt* stetig differenzierbar *(bzw. stetig, bzw. r-mal stetig differenzierbar), wenn alle $\binom{n}{k}$ Koeffizientenfunktionen $f_{j_1\dots j_k}$ diese Eigenschaft haben.*

2. *Für eine stetig differenzierbare Differentialform ω der Ordnung k definieren wir nun eine $(k+1)$-Form $d\omega$, die* äußere Ableitung *der Differentialform ω, durch*

$$d\omega := \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} df_{j_1\dots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Natürlich lässt sich $d\omega$ dann als Linearkombination der Basiselemente $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k+1}}$ ausdrücken: Man schreibt

$$d\omega := \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} \frac{\partial f_{j_1\dots j_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

und ordnet die Indizes so um, dass sie strikt monoton wachsend angeordnet sind.

Satz 1.2.5.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

1. (Linearität) Seien ω_1, ω_2 stetig differenzierbare k-Formen auf U und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2.$$

2. (Leibnizregel) Sei ω eine stetig differenzierbare k-Form und η eine stetig differenzierbare ℓ-Form. Dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. Für jede zweimal stetig differenzierbare k-Form ω auf U gilt $d(d\omega) = 0$.

Dass $d^2 = 0$ gilt, besagt, dass d ein Randoperator ist, mit dessen Hilfe man Kohomologiegruppen definieren kann – in unserem Fall deRham Kohomologie. Wer mehr dazu erfahren möchte, ist auf [MT] verwiesen.

Beweis.

1. Die erste Behauptung ist eine Folge der Differentiationsregeln.

2. Die zweite Behauptung folgt aus der Produktregel für die Koeffizientenfunktionen und der graduierten Symmetrie (3) aus Bemerkung 1.1.17.1: Für

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{|J|=\ell} g_J dx_J$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \textstyle\sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= (\textstyle\sum_I df_I \wedge dx_I) \wedge (\textstyle\sum_J g_J dx_J) + (-1)^k (\textstyle\sum_I f_I \wedge dx_I) \wedge (\textstyle\sum_J dg_J \wedge dx_J) \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.
\end{aligned}$$

3. Die dritte Behauptung folgt aus der Symmetrie der Hesseschen Matrix:

$$d^2\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} = 0.$$

$\square$

Wir führen weitere Notation ein:

Definition 1.2.6
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, wobei $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung versehen ist.

1. *Das* vektorielle Linienelement *ist das n-Tupel von* 1*-Formen* $\mathrm{d}\vec{s} := (dx_1, \ldots, dx_n)^T$ *auf* U.

2. *Das* vektorielle (Hyper-)Flächenelement *ist das n-Tupel von $(n-1)$-Formen,* $\mathrm{d}\vec{S} := (dS_1, \ldots, dS_n)^T$ *auf* U *mit*

$$dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{dx_i}^{\text{auslassen}} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beispiel 1.2.7.
Wir betrachten Differentialformen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Differentialformen verschiedener Ordnung und ihre äußeren Ableitungen.

1. Eine stetig differenzierbare 0-Form auf U ist eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$. Ihr Differential $df = \partial_1 f dx^1 + \ldots \partial_n f dx^n = \langle \operatorname{grad} f, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ ist eine 1-Form.

2. Betrachte das *Volumenelement* $\mathrm{d}V := dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Jede stetig differenzierbare n-Form auf U ist von der Form $c\,\mathrm{d}V$ mit einer stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktion $c\colon U \to \mathbb{R}$, und hat äußere Ableitung 0.

3. Sei ψ eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form. Schreiben wir mit einem Vektorfeld b und dem vektoriellen Hyperflächenelement $d\vec{S}$,

   $$\psi = \langle b, d\vec{S}\rangle = b_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n - b_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + (-1)^{n-1} b_n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1},$$

   so ist die äußere Ableitung die n-Form

   $$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \ldots + \partial_n b_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = (\operatorname{div} b) \cdot \mathrm{d}V.$$

   Konkret für $n = 3$ sieht dies so aus: Die 2-Form

   $$\psi = \langle b, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$$

   hat die äußere Ableitung

   $$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{div} b) \cdot \mathrm{d}V.$$

4. Sei φ eine stetig differenzierbare 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben dann die 1-Form mit einem Vektorfeld a in der Form $\varphi = \langle a, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$, und rechnen nach, dass gilt:

   $$\begin{aligned} d\varphi &= (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_1 a_3 - \partial_3 a_1) dx_1 \wedge dx_3 + (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \langle \operatorname{rot} a, \mathrm{d}\vec{S}\rangle \end{aligned}$$

   mit dem vektoriellen Flächenelement $\mathrm{d}\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, -dx_1 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_2)^T$.

Wir haben so die Differentialoperatoren Rotation, Divergenz und Gradient durch Differentialformen verstanden.

Definition 1.2.8
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. *Eine stetig differenzierbare k-Form ω auf U heißt* geschlossen, *falls $d\omega = 0$ gilt.*
2. *Für $k \geq 1$ heißt eine stetige k-Form ω auf U* exakt, *falls es eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η auf U gibt, so dass $\omega = d\eta$ gilt.*

Lemma 1.2.9.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede auf U stetig differenzierbare exakte k-Form ist geschlossen.

Beweis.
Zu einer exakten k-Form ω finden wir nach Definition 1.2.8 eine $(k-1)$-Form η mit $\omega = d\eta$. Dann gilt wegen Satz 1.2.5.3

$$d\omega = d^2\eta = 0.$$

□

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in U$ die Verbindungsstrecke $\overline{x_0 x}$ ganz in U liegt.

Theorem 1.2.10. [Lemma von Poincaré.]
Ist eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist jede geschlossene k-Form auf U mit $k \geq 1$ auch exakt.

Beweis.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$. Es reicht aus, k-Formen der Form

$$\omega = f(x)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

auf U zu betrachten. Hierzu definieren wir die $(k-1)$-Form

$$I(\omega) := \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) \mathrm{d}t\right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

wobei die 1-Form dx_{i_α} ausgelassen wird. Das Integral ist definiert, weil $tx \in U$ liegt, da U sternförmig ist. Dann gilt

$$(*) \qquad \omega = \ dI\omega + Id\omega.$$

Für eine geschlossen Form ω folgt hieraus sofort $\omega = dI\omega$, so dass ω exakt ist.

Die Gleichung $(*)$ folgt durch direkte Rechnung: Es gilt

$$\begin{aligned} dI\omega &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t\right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t\right] dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t\right] \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + k\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t\right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Wir schreiben das Integral im zweiten Summanden um:

$$\begin{aligned} k\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t &= t^k f(tx)\Big|_0^1 - \int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \mathrm{d}t \\ &= f(x) \ - \int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \mathrm{d}t \end{aligned}$$

und rechnen die Ableitung des Integrals im ersten Summanden aus:

$$d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\mathrm{d}t\right] = \sum_{\beta=1}^n \left[\int_0^1 t^k \partial_\beta f(tx)\mathrm{d}t\right] dx_\beta .$$

Damit finden wir insgesamt für den ersten Summanden in (*):

$$\begin{aligned} dI\omega &= \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^k \partial_\beta f(tx)\mathrm{d}t\right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots dx_{i_k} \\ &\quad + f(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - \left[\int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \mathrm{d}t\right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} . \end{aligned}$$

Wir berechnen auch explizit den zweiten Summanden in (∗): wir finden

$$d\omega = \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(x) dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

und somit

$$\begin{aligned} Id\omega &= \sum_{\beta=1}^n \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \cdot t^k \partial_\beta f(tx)\right] x_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \cdot t^k \partial_\beta f(tx)\right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Der Vergleich liefert nun (∗). □

Bemerkung 1.2.11.
Aus dem Poincaréschen Lemma, zusammen mit den Beispielen 1.2.7, folgt für jede sternförmige offene Menge $U \subset \mathbb{R}^3$:

1. Ist $a\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\mathrm{rot} a = 0$, so existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $a = \mathrm{grad}\, f$.

   Denn führt man wie in Beispiel 1.2.7.4 eine 1-Form $\varphi := \langle a, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ ein; dann ist

   $$d\varphi \overset{1.2.7.3}{=} \langle \mathrm{rot} a, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = 0.$$

   Nach dem Poincaréschen Lemma 1.2.10 gibt es eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit

   $$\varphi = df \overset{1.2.7.1}{=} \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$$

   also $a = \mathrm{grad}\, f$.

   In der Elektrostatik gilt für das elektrische Feld $\mathrm{rot} E = 0$. Daher gibt es eine skalare Funktion V, das elektrische Potential, mit $-\mathrm{grad}\, V = E$.

2. Ist $b\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\mathrm{div}\, b = 0$, so existiert ein stetig differenzierbares Vektorfeld $a\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $b = \mathrm{rot} a$.

   Zum Beweis führen wir wie in Beispiel 1.2.7.3 eine 2-Form $\psi := \langle b, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ ein; dann ist nach 1.2.7.3 die äußere Ableitung $d\psi = \mathrm{div}\, b \mathrm{d}V = 0$. Nach dem Poincaréschen Lemma 1.2.10

gibt es eine 1-Form φ mit $\psi = d\varphi$. Schreiben wir $\varphi = \langle a, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ mit einem Vektorfeld a, so folgt

$$\langle \mathrm{rot} a, d\vec{S}\rangle \overset{1.2.7.4}{=} d\varphi = \psi = \langle b, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$$

und somit $b = \mathrm{rot} a$.

Für das magnetische Feld gilt $\operatorname{div} B = 0$; also existiert ein Vektorfeld A, das Vektorpotential, so dass $B = \mathrm{rot} A$.

Definition 1.2.12
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, sei

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} f_{j_1 \ldots j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

eine k-Form auf U und $\varphi \colon V \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\varphi^* \omega := \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} (f_{j_1 \ldots j_k} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{j_k}.$$

eine k-Form auf V, der Rücktransport *oder* Pullback *$\varphi^* \omega$.*

Wir halten ohne Beweis die wichtigsten Eigenschaften des Rücktransports fest:

Satz 1.2.13.

1. Der Rücktransport φ^* ist linear: für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und ω_1, ω_2 k-Formen gilt
$$\varphi^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \varphi^*(\omega_1) + \lambda_2 \varphi^*(\omega_2).$$
2. Der Rücktransport ist verträglich mit dem Dachprodukt,
$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta).$$
3. Der Rücktransport ist verträglich mit der äußeren Ableitung: Ist φ zweimal stetig differenzierbar und ω eine stetig differenzierbare k-Form, so gilt
$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$
4. Ist weiterhin $W \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\psi \colon W \to V$ stetig differenzierbar, so ist
$$(\varphi \circ \psi)^* \omega = \psi^*(\varphi^* \omega).$$

Wir brauchen explizitere Formeln für den Rücktransport.

Beispiel 1.2.14.
Seien $V \subset \mathbb{R}^m$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $\varphi \colon V \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Differentiale der Koeffizientenfunktionen $\varphi_i \colon V \to \mathbb{R}$ liefern 1-Formen

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j.$$

1. Für den Rücktransport einer 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ auf U finden wir deshalb

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) dt_j$$

2. Sei $k = m$, so dass die zurückgezogene Form höchstmöglichen Grad hat. Da Differentialformen alternierend sind, folgt

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k.$$

   Es folgt für den Rücktransport einer k-Form auf $\mathbb{R}^n$ zu einer k-Form auf $\mathbb{R}^m$:

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$\varphi^*\omega = \left(\sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} (f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} \right) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k.$$

3. Insbesondere gilt im Fall $m = k = n$ für $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$$\varphi^*\omega = f \circ \varphi (\det \mathrm{d}\varphi) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n. \tag{4}$$

   Formen höchstmöglichen Grades transformieren sich also mit der Determinante.

Definition 1.2.15
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine n-Form

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

auf U heißt über $A \subset U$ integrierbar, *wenn die Koeffizientenfunktion f über A im üblichen Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Dann setzt man*

$$\int_A \omega := \int_A f(x) \mathrm{d}^n x.$$

Insbesondere existiert für jede stetige n-Form das Integral über jedes Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 1.2.16
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Gilt für alle $x \in U$, dass $\det((d\varphi)_x) > 0$, bzw. dass $\det((d\varphi)_x) < 0$, so heißt der Diffeomorphismus φ orientierungserhaltend, *bzw.* orientierungsumkehrend.

Satz 1.2.17.
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Sei U zusammenhängend; dann ist φ entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. Sei

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

eine stetige n-Form auf V. Ist φ orientierungserhaltend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega \;=\; \int_A \varphi^*\omega;$$

ist φ orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega \;=\; -\int_A \varphi^*\omega.$$

Beweis.
Das folgt sofort aus dem Transformationsverhalten (4) von Differentialformen in Beispiel 1.2.14 und dem Transformationssatz für Integrale. □

Definition 1.2.18
Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

1. *Unter einem* Atlas $\mathfrak{A}$ *für M versteht man eine Menge $\{\varphi_j \colon T_j \to V_j : j \in J\}$ von Karten von M, deren Bilder M überdecken, also $\bigcup_j V_j = M$.*
2. *Lässt sich für M ein Atlas $\mathfrak{A}$ finden, so dass für je zwei sich schneidende Karten aus $\mathfrak{A}$ der zugehörige Kartenwechsel-Diffeomorphismus τ orientierungserhaltend ist, so nennt man die Untermannigfaltigkeit M* orientierbar. *(Orientierbarkeit ist eine Eigenschaft.)*
3. *Ist M versehen mit einem solchen Atlas, so nennen wir $(M, \mathfrak{A})$ eine durch den Atlas $\mathfrak{A}$* orientierte *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. (Die Wahl einer Orientierung ist eine Struktur.)*
4. *Alle weiteren Karten von M, die wir einem Atlas $\mathfrak{A}$, der eine Orientierung definiert, hinzufügen können, so dass der Atlas immer noch eine Orientierung definiert, nennen wir* positiv orientiert*; alle anderen Karten negativ orientiert.*

Man kann eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M als Äquivalenzklasse von Atlanten verstehen. Wenn M zusammenhängend ist, so gilt: Entweder ist M nicht orientierbar, oder es existieren genau zwei Orientierungen: Zu jeder Orientierung $\mathfrak{A}$ gibt es auch noch die *entgegengesetzte Orientierung* $-\mathfrak{A}$.

Definition 1.2.19
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige k-Form auf U. Sei $(M, \mathfrak{A})$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$. Sei A eine kompakte Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M.

Es soll das Integral von der k-Form ω über $(M, \mathfrak{A})$ erklärt werden. Man beachte, dass der Grad der Form gleich der Dimension der Untermannigfaltigkeit ist.

- *In dem Fall, in dem es eine einzige Karte $\varphi \colon T \xrightarrow{\sim} V \subset M$ gibt mit $A \subset V$, setzt man*
$$\int_{(A,\mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$
Aus Satz 1.2.17 folgt, dass dies unabhängig von der gewählten Karte φ ist.
- *Es gebe nun endlich viele bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Karten*
$$\varphi_\ell \colon T_\ell \xrightarrow{\sim} V_\ell \subset M, \ell = 1, \ldots, m, \text{ mit}$$
$$A \subset \bigcup_\ell V_\ell$$
mit einer der Überdeckung $(V_\ell)_\ell$ untergeordneten lokal-integrierbaren stetigen Teilung der Eins
$$\alpha_j \colon \bigcup_\ell V_\ell \longrightarrow \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \ldots, m.$$

Wir setzen

$$A_j := A \cap \ \mathrm{supp}(\alpha_j) \subset V_j.$$

und nennen die k-Form ω integrierbar *über A, falls ω über alle A_j im Sinne der vorgehenden Betrachtung integrierbar ist. Dann setzen wir*

$$\int_{(A,\mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega).$$

Man zeigt (wie bei der Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten), dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins ist.

Definition 1.2.20

1. *Sei $(M, \mathfrak{A})$ eine durch den Atlas $\mathfrak{A}$ orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und φ eine bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Karte. Man nennt für einen Punkt $p \in M$ die Basis $((\partial_1\varphi)(p), \ldots, (\partial_k\varphi)(p))$ des Tangentialraums T_pM und alle gleich-orientierten Basen des Vektorraums T_pM (bezüglich $\mathfrak{A}$)* positiv orientiert.

2. *Ist $n \geq 2$ und M spezieller eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung, so ist ein bezüglich $\mathfrak{A}$* positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld *auf M ein stetiges Vektorfeld ν auf M, so dass für jedes $p \in M$ der Vektor $\nu(p)$ ein Einheits-Normalenvektor auf M ist, und so dass gilt: Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Basis von T_pM, so ist $(\nu(p), v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine bezüglich der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$.*

Für den Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir auf [F3, §20].

Bemerkungen 1.2.21.

1. Wenn eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Orientierung $\mathfrak{A}$ besitzt, so existiert ein positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld.

2. Eine Orientierung einer Hyperfläche lässt sich umgekehrt durch ein Einheits-Normalenfeld ν charakterisieren.

3. Für ein Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂A sprechen wir von der *kanonischen Orientierung* des Randes ∂A, wenn die Orientierung durch das *äußere* Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Wir erinnern an das vektorielle (Hyper-)Flächenelement aus Definition 1.2.6: Dies ist ein n-Tupel von $(n-1)$-Formen, $\mathrm{d}\vec{S} := (dS_1, \ldots, dS_n)^T$. Somit ist für ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Ausdruck $\langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ eine stetige $(n-1)$-Form auf U.

Wir wollen die Integration von Differentialformen und von Funktionen in Beziehung setzen.

Satz 1.2.22.
Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und $M \subset U$ eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$, die durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ orientiert sei. Sei $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$

$$\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).$$

Symbolisch wird die Aussage auch in der Form $\mathrm{d}\vec{S} = \nu \mathrm{d}S$ geschrieben. Man beachte, dass auf der linken Seite eine $(n-1)$-Form und auf der rechten Seite eine reellwertige Funktion integriert werden.

Beweis.
Wir betrachten nur den Spezialfall einer parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$: Es sei U offen im $\mathbb{R}^3$ und $M \subset U$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die mit nur einer Karte $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} M$ beschrieben wird, wobei T offen im $\mathbb{R}^2$ ist.

Es sei $f = (f_1, f_2, f_3)\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und $K \subset M$ kompakt. Wir wollen zeigen:

$$\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).$$

Für $t \in T$ ist der Einheitsnormalenvektor im Punkt $\varphi(t) \in M$ gegeben durch das Vektorprodukt

$$\nu(\varphi(t)) = \frac{\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi}{||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi||}$$

Wir rechnen dann

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle &= \int_K f_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \int_K f_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \int_K f_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 - \varphi^* f_2 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 + \varphi^* f_3 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^* f_1 \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1}\right)\right. \\
&\quad + \varphi^* f_2 \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\right) \\
&\quad \left. + \varphi^* f_3 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\right)\right) \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \right\rangle \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei erst die Definition des vektoriellen Flächenelements $d\vec{S}$ eingesetzt, dann die Definition 1.2.19 des Integrals und die Definition 1.2.12 des Rücktransports und dann die Kettenregel, gefolgt von der Definition des Kreuzprodukts.

Unser Zwischenergebnis ist das in Definition 1.2.15 definierte Integral einer 2-Form über die Teilmenge $\varphi^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^2$. Dieses Integral ist:

$$\begin{aligned}
\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle \varphi^* f(t), \partial_1\varphi \times \partial_2\varphi\rangle \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t))\rangle \underbrace{||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}_{dS(x)} \\
&= \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.23

1. *Sei $H_k \subset \mathbb{R}^k$ der* Halbraum

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}.$$

Wir versehen den Rand ∂H_k mit der durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld ν mit $\nu(x) = e_1$ für $x \in \partial H_k$ gegebenen Orientierung.

2. *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subset M$. Ein Punkt $p \in M$ heißt* Randpunkt *der Teilmenge A relativ zur Untermannigfaltigkeit M, falls in jeder Umgebung von p sowohl Elemente von A als auch von $M \setminus A$ liegen. Die Menge aller dieser Randpunkte bezeichnen wir mit $\partial_M A$. Dies ist eine Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M.*

3. *Wir sagen, ein Kompaktum $A \subset M$ habe* glatten Rand *$\partial_M A$, wenn gilt: Es existiert für jedes $p \in \partial_M A$ eine Karte $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} V$ von M mit $p \in V$, so dass $\varphi(H_k \cap T) = A \cap V$ und $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial_M A \cap V$ gilt. Eine solche Karte von M nennen wir* randadaptiert.

Man zeigt:

Betrachtung 1.2.24.

1. Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subset M$ kompakt mit glattem Rand, so ist $\partial_M A$ eine kompakte $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2. Ist die Untermannigfaltigkeit M zusätzlich orientiert, so erhält man eine *induzierte Orientierung* auf dem Rand $\partial_M A$: Man wähle nur randadaptierte Karten, die positiv orientiert sind, und schränke diese auf den Rand $\partial_M A$ ein.

3. Im Fall $k = n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, A wie in 2, ist die auf $\partial_M A$ durch die kanonische Orientierung von M induzierte Orientierung diejenige, die durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Der folgende Satz ist schon ein Spezialfall des Satzes von Stokes:

Lemma 1.2.25.
Sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form im $\mathbb{R}^k$ mit $k \geq 2$, mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{H_k} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Beweis.

- Wir schreiben die $(k-1)$-Form ω als

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_k$$

  mit C^1-Funktionen $f_1, \ldots, f_k$. In der von der randadaptierten Karte induzierten Karte $\beta\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k$ des Randes mit $(t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \ldots, t_{k-1})$ gilt

$$\beta^* \omega = f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1};$$

  also folgt für das Randintegral

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) \mathrm{d}^{k-1} t.$$

- Wir berechnen das Integral der k-Form

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

über den Halbraum $H_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$. Für jedes feste $(x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ folgt, da die Komponentenfunktion f_1 kompakten Träger hat

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_k).$$

Es folgt durch weitere Integration:

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Für $2 \leq j \leq k$ gilt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \pm \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_j} \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Für festes $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ hat die Funktion $x_j \mapsto f_j(x_1, \ldots, x_k)$ kompakten Träger. Also verschwindet das Integral in der Klammer. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_k = \int_{\partial H_k} \omega.$$

□

Wir können nun den Stokesschen Integralsatz in seiner vollständigen Form formulieren:

Theorem 1.2.26 (Stokesscher Integralsatz im $\mathbb{R}^n$)**.**
Sei U offen im $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subset U$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit $k \geq 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in U. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset M$ mit glattem Rand $\partial_M A$, wobei wir $\partial_M A$ mit der von M induzierten Orientierung versehen:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \omega.$$

Der Stokessche Integralsatz gilt auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

Beweis.

- Wie im Beweis des Gaußschen Integralsatzes führen wir zu einem randadaptierten Atlas ein feine beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins $\alpha_{p,\epsilon}$ ein und zerlegen die $(k-1)$-Form ω:

$$\omega = \sum_p \alpha_{p,\epsilon} \omega.$$

Es genügt wieder, den Stokesschen Integralsatz für die einzelnen Summanden zu beweisen.

- Wir nehmen daher an, dass $M \cap \mathrm{supp}(\omega)$ kompakt und ganz in einer Karte $\varphi \colon \Omega \to V \subset M$ aus dem randadaptierten Atlas enthalten ist. Die Differentialform $\varphi^*\omega$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ kann daher durch Null zu einer auf ganz $\mathbb{R}^k$ stetig differenzierbaren Differentialform $\tilde{\omega}$ mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Es gilt

$$(*) \qquad \int_A d\omega \overset{\text{def}}{=} \int_{H_k \cap \Omega} \varphi^*(d\omega) \overset{1.2.13.3}{=} \int_{H_k \cap \Omega} d\varphi^*\omega = \int_{H_k} d\tilde{\omega}.$$

- Betrachte die Einbettung
$$\begin{array}{rcl}\beta\colon \quad \mathbb{R}^{k-1} & \to & \mathbb{R}^k \\ (u_1,\ldots,u_{k-1}) & \mapsto & (0,u_1,\ldots,u_{k-1})\end{array}$$
und
$$\Omega_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^{k-1}.$$
Dann ist
$$\psi := \varphi \circ \beta \colon \Omega_0 \to V_0 := \partial_M A \cap V$$
eine Karte des Randes $\partial_M A$. Dann ist
$$(**) \qquad \int_{\partial_M A} \omega \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega_0} \psi^*\omega = \int_{\Omega_0} \beta^*\varphi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}.$$
Die Gleichheit von $(*)$ und $(**)$ und somit die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.2.25.

□

Korollar 1.2.27.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf U. Dann gilt für jede orientierte, kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset U$
$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis.
Da M kompakt ist, wähle im Stokesschen Satz 1.2.26 $A = M$. Da die Mannigfaltigkeit M keinen Rand hat, ist $\partial M = \emptyset$. □

Wir leiten aus dem Stokesschen Satz 1.2.26 zwei klassische Integralsätze ab.

Bemerkungen 1.2.28.
1. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Betrachte eine parametrisierte Fläche $M \subset U$ im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei ein differenzierbares Vektorfeld $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ gegeben, das mit dem vektoriellen Linienelement $\mathrm{d}\vec{s}$ aus Definition 1.2.6 eine 1-Form $\omega := \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ liefert.

   Sei $A \subset M$ ein Kompaktum in der Fläche M mit glattem Randweg $\varphi\colon [a,b] \to M$, der positiv umlaufend sein soll. Dann erhalten wir mit $d\omega = \langle \mathrm{rot}F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ aus Beispiel 1.2.7.4
$$\begin{array}{rcl}\int_A \langle \mathrm{rot}F(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x) & \overset{1.2.22}{=} & \displaystyle\int_A \langle \mathrm{rot}F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_A d\omega \\ & \overset{1.2.26}{=} & \displaystyle\int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle \\ & = & \displaystyle\int_{[a,b]} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \mathrm{d}t.\end{array}$$
   Dies ist der klassische Satz von Stokes.

2. Der klassische Satz von Gauß ist der Spezialfall $k = n$ des Satzes von Stokes 1.2.26. Mit der $(n-1)$-Form $\omega = \langle F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ ist hierbei wie in Beispiel 1.2.7.3
$$d\omega = (\mathrm{div}\, F) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$
   Wir finden
$$\begin{array}{rcl}\int_A \mathrm{div}\, F \mathrm{d}^n x & = & \displaystyle\int_A d\omega \overset{1.2.26}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{S}\rangle \\ & \overset{1.2.22}{=} & \displaystyle\int_{\partial A} \langle F, \nu\rangle dS(x).\end{array}$$

2 Funktionentheorie

2.1 Komplexe Differenzierbarkeit

In der Funktionentheorie beschäftigt man sich mit Funktionen (auf nicht-leeren offenen Teilmengen in $\mathbb{C}$), die komplex differenzierbar sind.

Bisher haben wir nur Ableitungen komplexwertiger Funktionen reeller Variablen

$$f\colon U \to \mathbb{C} \text{ mit } U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

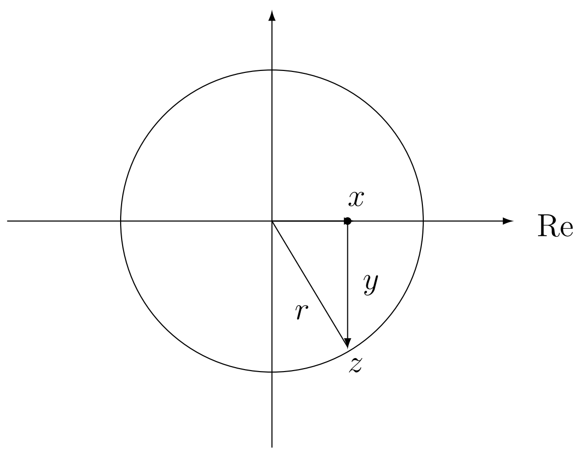
definiert. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann als zwei-dimensionaler reeller Vektorraum aufgefasst werden. Daher ist der Begriff der *reellen* Differenzierbarkeit und reellen Ableitung von Funktionen

$$f\colon U \to \mathbb{C} \text{ mit } U \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$

schon definiert.

Bemerkung 2.1.1.
Wir erinnern an grundlegende Definitionen:

1. $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$,



   $x = \text{Re}z$ ist der Realteil, $y = \text{Im}z$ der Imaginärteil von $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & \bar{z} := x - iy \end{array}$$

   gegebene Abbildung heißt *komplexe Konjugation*. Für den *Betrag* $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

2. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $z = re^{i\varphi}$ gilt. Es ist $r = |z|$ eindeutig bestimmt; für $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist der Winkel φ bis auf ein additives Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Fordert man $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so heißt $\varphi =: \arg z$, das *(Haupt-)Argument* von z; es ist eindeutig bestimmt.

   Es gilt dann

$$z = |z|e^{i\varphi} = \exp(\ln |z| + i \arg z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist dies eine Darstellung von z in *Polarkoordinaten*.

Es gilt:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0, \\ -\arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

3. $\mathbb{C}$ ist ein Körper; in Polarkoordinaten schreibt sich die Multiplikation $(z, z') \mapsto zz'$ und die Inversenbildung $z \mapsto z^{-1}$ besonders einfach.

4. Außerdem ist $\mathbb{C}$ mit der durch

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \text{ für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

definierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum (und als solcher homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit der metrischen Struktur, die aus der Norm auf $\mathbb{R}^2$ folgt). Es ist also definiert, was eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist: U heißt offen, wenn es zu jedem $a \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass die offene Kreisscheibe

$$B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| < r\}$$

in U enthalten ist.

5. Wie bei jedem metrischen Raum haben wir Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, konvergieren komplexe Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ gegen einen (eindeutig bestimmten) Grenzwert.

Wir treffen folgende Verabredungen:

- Sei $B \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wenn z_0 Häufungswert von $B \setminus \{z_0\}$ ist und $g\colon B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so ist mit $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)$ immer $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B \setminus \{z_0\}}} g(z)$ gemeint.
- Es bezeichne $U \subset \mathbb{C}$ im folgenden immer eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist U zusätzlich wegzusammenhängend, so sprechen wir von einem *Gebiet* in $\mathbb{C}$.

Definition 2.1.2

1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ wie oben (offen und nicht leer). Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in U$* komplex differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} =: f'(z_0)$$

existiert.

2. *Eine Funktion heißt im Punkt $z_0 \in U$* holomorph, *wenn sie in einer Umgebung von z_0 (also etwa einer Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0)$) komplex differenzierbar ist.*

3. *Eine* holomorphe Funktion *auf U ist eine auf U komplex differenzierbare Funktion f.*

Beispiel 2.1.3.

1. Ist f konstant gleich $c \in \mathbb{C}$, so ist f komplex differenzierbar mit Ableitung $f' = 0$.

2. Wir betrachten die komplexe Konjugation:

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}.$$

Dann gilt für $z_0, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$:

$$\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z} = \frac{\overline{z_0+z}-\overline{z_0}}{z} = \frac{\overline{z}}{z}.$$

Der Grenzwert $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ existiert nicht: Für die Folge $u_k := \frac{1}{k}$ reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{\overline{u_k}}{u_k} = 1$. Aber für die Folge $v_k := \frac{i}{k}$ rein imaginärer Zahlen, für die ebenfalls $\lim_{k\to\infty} v_k = 0$ gilt, finden wir $\lim_{k\to\infty} \frac{\overline{v_k}}{v_k} = -1$.

Die Funktion f ist also in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, obwohl f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar ist.

Bemerkungen 2.1.4.

1. Da komplexe Differenzierbarkeit formal genau so definiert ist wie Differentiation im $\mathbb{R}^1$, lassen sich Regeln wie Summen- , Produkt-, Kettenregel und l'Hospital analog wie im Reellen beweisen. (Man muss nur statt Intervallen offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ als Definitionsbereiche betrachten.) Insbesondere sind polynomiale Funktionen holomorph.

2. Man zeigt auch wie bei reeller Differenzierbarkeit: Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist genau dann in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(0)$ mit $\varepsilon > 0$ und eine Funktion

$$\varphi\colon B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C} \text{ mit } \lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z)}{z} = 0$$

gibt, so dass

$$f(z_0+z) = f(z_0) + c \cdot z + \varphi(z) \text{ für } z \in B_\varepsilon(0)$$

gilt. In diesem Fall ist $c = f'(z_0)$.

Satz 2.1.5 (und Definition)**.**

(a) Ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{C} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

eine *Potenzreihe* (mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$), die auch für $z_1 \neq z_0$ konvergiert, so ist sie absolut konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_{|z_1-z_0|}(z_0)$, und gleichmäßig konvergent in $B_\rho(z_0)$ für jedes $\rho < |z_1 - z_0|$.

(b) In der Situation von (a) existiert ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, so dass die Reihe für alle z mit $|z-z_0| < r$ konvergiert und für alle z mit $|z - z_0| > r$ divergiert.

Zur Berechnung von r:

Es gilt die *Cauchy-Hadamardsche Formel*:

$$\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (\text{mit } \infty^{-1} = 0). \tag{5}$$

Des Weiteren gilt, falls alle $a_n \neq 0$:

$$\liminf \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq r \leq \limsup \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \qquad \text{(Quotientenkriterium)}.$$

(c) Ist nun $r > 0$ der Konvergenzradius,

$$f\colon B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

so ist f in jedem $z \in B_r(z_0)$ komplex differenzierbar, mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Beweis.
Zu (a), (b), vgl.MfP I und [R1], Kap. 4, §1:

Da die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für $z = z_1$ konvergiert, bilden ihre Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Wir setzen $r_1 := |z_1 - z_0|$. Es gibt also eine reelle Zahl $c > 0$, so dass

$$|a_\nu| r_1^\nu = |a_\nu (z_1 - z_0)^\nu| \leq c$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung sei $r_1 > 0$; wir haben also die Abschätzung

$$|a_\nu| \leq \frac{c}{r_1^\nu} \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}.$$

Für $|z - z_0| \leq \rho < r_1$ erhalten wir daraus die Abschätzung

$$|a_\nu (z-z_0)^\nu| = |a_\nu||z-z_0|^\nu \leq \frac{c}{r_1^\nu} \rho^\nu = c q^\nu$$

mit $q := \frac{\rho}{r_1}$. Wegen $0 < \rho < r_1$ ist $0 < q < 1$. Also ist die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c q^\nu$ eine konvergente Majorante für die Potenzreihe für solche z.

Es sei

$$\tilde{r} := \left(\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \right)^{-1}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $0 < \tilde{r} \leq \infty$ und wählen ein r_0 mit $0 < r_0 < \tilde{r}$. Es gilt also

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < \frac{1}{r_0}.$$

Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r_0} \Leftrightarrow |a_n| < \frac{1}{r_0^n}.$$

Hieraus folgt die Abschätzung

$$|a_n (z-z_0)^n| < \left(\frac{|z-z_0|}{r_0} \right)^n,$$

woraus für alle z mit $|z - z_0| < r_0$ nach dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe folgt. Da r_0 mit $0 < r_0 < \tilde{r}$

beliebig gewählt war, folgt die Konvergenz der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für alle z mit $|z-z_0| < \tilde{r}$. Wir haben somit die untere Abschätzung $\tilde{r} \le r$ an den Konvergenzradius r.

Sei nun $\tilde{r}$ endlich, $0 \le \tilde{r} < \infty$, und wähle r_0 mit $\tilde{r} < r_0$. Das heißt aber

$$\frac{1}{r_0} < \frac{1}{\tilde{r}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Daher existiert eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \ldots$, so dass

$$\frac{1}{r_0} < |a_{n_p}|^{\frac{1}{n_p}}$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, also

$$\frac{1}{(r_0)^{n_p}} < |a_{n_p}|.$$

Für $|z-z_0| > r_0$ folgt daher für alle $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n_p}(z-z_0)^{n_p}| > 1,$$

so dass die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ schon deswegen nicht konvergent sein kann, weil ihre Glieder keine Nullfolge sind. Da r_0 beliebig mit $r < r_0$ war, folgt die Divergenz der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für alle z mit $|z-z_0| > \tilde{r}$. Wir haben somit die obere Abschätzung $\tilde{r} \ge r$ an den Konvergenzradius r.

Zu (c): Übung, insbesondere zeigt man mit (b), dass auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ in $B_r(z_0)$ absolut konvergiert. □

Korollar 2.1.6. Die Funktionen $\exp, \sin, \cos \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind komplex differenzierbar, und es gilt:

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin.$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Differentiation in $\mathbb{C}$ und Differentiation in $\mathbb{R}^2$?

Satz 2.1.7.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \colon U \to \mathbb{C}$. Man schreibe $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $u(x,y), v(x,y)$ reellwertige Funktionen sind.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 komplex differenzierbar.

2. f ist in (x_0, y_0) reell-differenzierbar und es gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*:
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Dies ist ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die reellwertigen Funktionen u und v in zwei Variablen.

Beweis.
Sei f in z_0 komplex differenzierbar und $A := f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$0 = \lim_{z\to 0} \frac{f(z_0+z) - f(z_0) - Az}{z} \tag{6}$$

gilt. Wir spalten in Real- und Imaginärteil auf:

$$A = \alpha + i\beta \text{ und } z = h + ik \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$$

und somit

$$Az = \alpha h - \beta k + i(\alpha k + \beta h).$$

Wir betrachten erst den Fall, dass $k = 0$ ist und erhalten $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$. Dies stimmt überein mit dem Grenzwert $\lim_{k\to 0} \frac{f(z_0+ik)-f(z_0)}{ik} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. Dies ergibt die Cauchy-Riemann-Gleichungen für f in z_0.

Gelten umgekehrt die Cauchy-Riemann-Gleichungen und setzen wir

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \alpha & = & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\beta & = & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{array}$$

so können wir die Jacobi-Matrix A schreiben als $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Damit ist die Multiplikation mit A eine komplex-lineare Abbildung und entspricht der Multiplikation mit $\alpha + i\beta$, so dass (6) gilt. □

Man beachte, dass wir auch die folgende Identität mitbeweisen haben:

$$f'(z_0) = A = \alpha + i\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Als einfache Folgerung haben wir das

Korollar 2.1.8.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ auf U holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f auf U konstant.

Beweis.
Nach dem vorangegangenen Satz 2.1.7 ist dann f auf U differenzierbar und es gelten für $f = u + iv$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x$$

sowie $f' = u_x + iv_x$. Aus $f' = 0$ folgt somit $u_x = v_x = 0$ und aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen das Verschwinden aller partiellen Ableitungen. Nach einem Satz aus der Analysis folgt auf dem Gebiet U daher, dass die reellen Funktionen u und v und somit auch f auf U konstant sind. □

Korollar 2.1.9.
Ist $f = u + iv$ holomorph auf einem Gebiet U und existieren auch noch stetige zweite partielle Ableitungen von u und v, so sind u und v harmonische Funktionen, d. h. es gilt in U:

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Beweis.
Dies folgt mit direkter Rechnung aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen:

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = -(u_y)_y = -u_{yy}.$$

□

Beispiel 2.1.10.

1. Für die Funktion $f(z) = z^2$ kann man die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen leicht explizit überprüfen.

2. Wir definieren den *Hauptzweig* des komplexen Logarithmus durch

$$\log\colon \mathbb{C}^* \to S := \{x + iy | y \in (-\pi, \pi]\},$$
$$\log z := \ln|z| + i \arg z.$$

Hierbei *wählen* wir das Hauptargument aus Bemerkung 2.1.1.2. Dann ist log die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\exp\colon S \to \mathbb{C}^*.$$

3. Die Funktion $\log\colon \mathbb{C}^* \to S$ ist allerdings auf der negativen reellen Achse nicht stetig: Sei $x \in \mathbb{R}_+^*$, dann ist $-x \in \mathbb{R}_-^*$ auf der negativen Halbachse, und sowohl

$$x_n := xe^{i(\pi - \frac{1}{n})} \text{ als auch } x_n' := xe^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$$

sind Folgen, die gegen $-x$ konvergieren, denn $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. Da die Folgenglieder beider Folgen, $\pi - \frac{1}{n}$ und $-\pi + \frac{1}{n}$ im halbofffenen Interval $(-\pi, \pi]$ liegen, folgt

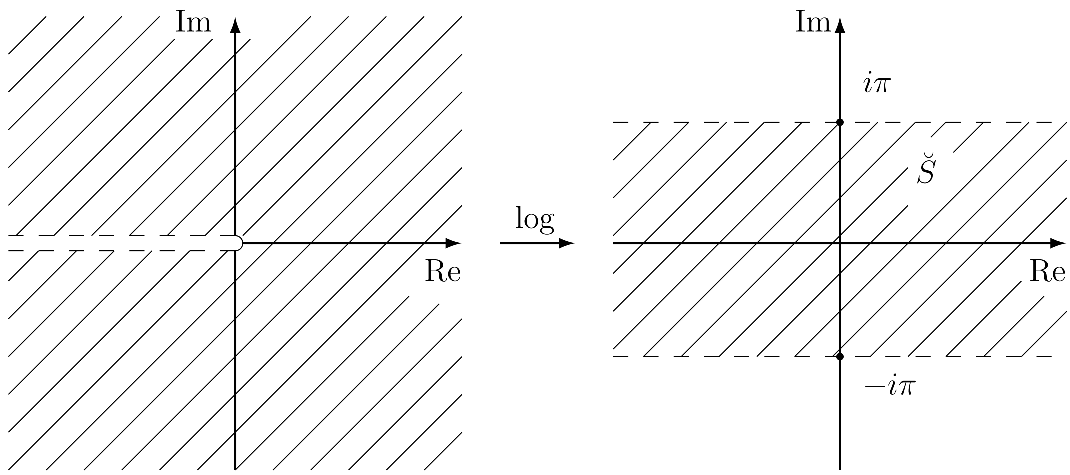
$$\log x_n = \ln x + i(\pi - \frac{1}{n}) \text{ und } \log x_n' = \ln x + i(-\pi + \frac{1}{n}),$$
$$\lim_{n\to\infty} \log x_n = \ln x + i\pi = \log(-x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \log x_n' = \ln x - i\pi \neq \log(-x).$$

Es ist also auch nicht möglich, dass log auf der ganzen punktierten Ebene $\mathbb{C}^*$ holomorph ist. Aber die Restriktion auf die geschlitzte Ebene

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} \log\colon \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_- & \to & \breve{S} \\ \log z & := & \ln|z| + i \arg z \end{array}$$

ist bijektiv, mit der Umkehrfunktion

$$\exp\colon \breve{S} \to \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-, \breve{S} = \{x + iy \in \mathbb{C} | y \in (-\pi; \pi)\}.$$



Die in $(*)$ definierte Funktion log ist holomorph, denn es ist

$$\log(x+iy) = \underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + \underbrace{i\,\mathrm{sgn}y \cdot \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{v(x,y)}$$

$$\mathrm{sgn}y := \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \\ -1 & \text{für } y < 0 \end{cases} \overset{(y\neq 0)}{=} \frac{y}{\sqrt{y^2}}$$

woraus durch Differenzieren folgt für $y \neq 0$:

$$v_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ und } v_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Das gilt auch für $x > 0$, $y = 0$, und außerdem

$$u_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ und } u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also erfüllt, die Funktion log ist auf $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ holomorph, und es folgt

$$f'(z) = (u_x + iv_x)(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Bemerkung 2.1.11.

1. Mit Hilfe des Differentialoperators

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

kann man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen umschreiben zu $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f\,(z_0) = 0$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x) = 0.$$

Zum Beispiel erhält man für die Funktion $f(z) = \bar{z}$, dass $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f\,(z_0) = 1$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Es folgt die aus Beispiel 2.1.3.2 bekannte Tatsache, dass f nicht holomorph ist.

2. Dies rechtfertigt, eine Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ umzuschreiben zu $f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), -\frac{i}{2}(z-\bar{z})\right)$ und im Wirtingerkalkül formal nach unabhängigen Variablen $z, \bar{z}$ zu differenzieren. Dabei ist

$$f'(z_0) \quad = \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} f\right)(z_0) := \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\right)(x_0, y_0).$$

3. Führen wir nun einen Kalkül von komplexen Differentialformen auf $\mathbb{R}^2$ ein, vgl. ÜA., mit komplexwertigen Koeffizientenfunktionen vor Dachprodukten der 1-Formen $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^2$:

   Dabei ergibt sich für Funktionen $h\colon U \to \mathbb{C}, \quad z = x+iy \mapsto h(z)$, die stetig reell differenzierbar sind nach x und y, dass gilt:

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.$$

Wieder betrachtet man die äußere Ableitung von Differentialformen und auch die Integration von Differentialformen. Für die Integration einer 1-Form $\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$ über eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ erhält man aus dem Kalkül der Integration von Differentialformen

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \big(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \overline{\gamma'(t)}\big)\mathrm{d}t.$$

(Ist insbesondere die 1-Form holomorph, d.h. $g = 0$, so ergibt sich die Definition des komplexen Kurvenintegrals aus dem folgenden Abschnitt.)

Bemerkung 2.1.12. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt, dass die Jacobische Determinante einer in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorphen Funktion f dort gerade gleich

$$u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

ist. Ist speziell $f'(z_0) \neq 0$, so ist f ein (lokaler) Diffeomorphismus.

Definition 2.1.13

1. *Eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ heißt* konform, *wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

   - *Die Abbildung L ist injektiv und für je zwei von Null verschiedene Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^k$ gilt*
   $$\frac{\langle Lv, Lw\rangle}{\|Lv\| \cdot \|Lw\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$
   - *Es gibt eine Zahl $\rho \neq 0$, so dass für die darstellende Matrix A von L gilt $A^t A = \rho^2 \mathbf{1}$.*

   (Es ist leicht zu sehen, dass aus der zweiten Bedingung $\langle Lv, Lw\rangle = \rho^2\langle v, w\rangle$ und somit die erste Bedingung folgt. Für die andere Richtung verweisen wir auf [Koe, p. 176].)

2. *Eine differenzierbare Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ heißt* konform *im Punkt $x \in U$, wenn ihr Differential $\mathrm{d}f(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ in x eine konforme lineare Abbildung ist.*

Bemerkungen 2.1.14.

1. Aus der ersten Charakterisierung konformer Abbildungen folgt, dass konforme Abbildungen Winkel erhalten.

2. Ist A die darstellende Matrix einer konformen Abbildung und $k = n$, so ist $\rho^{-1}A$ eine orthogonale Matrix. Man nennt dann A eine *Ähnlichkeitsmatrix.*

3. Nach der Kettenregel werden die Tangentialvektoren differenzierbarer Kurven durch den Punkt x unter f durch das Differential $\mathrm{d}f(x)$ abgebildet. Daher ist eine differenzierbare Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ konform in $z \in U$, wenn für alle differenzierbaren Kurven γ_1, γ_2 mit $\gamma_1(0) = z = \gamma_2(0)$ sich die Kurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ in $f(z)$ im gleichen Winkel schneiden wie die Kurven γ_1 und γ_2 im Punkt z.

Satz 2.1.15.
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f = u + iv\colon U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann ist f in $z \in U$ genau dann konform, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:

- Das Paar (u, v) oder das Paar (v, u) erfüllt in z die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
- Es gilt $u_x^2(z) + v_x^2(z) \neq 0$.

Beweis.
Eine reelle 2×2-Matrix ist genau dann orthogonal wenn sie entweder von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

ist, also eine Drehung oder eine Spiegelung ist, und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gilt. Also ist die Jacobische Matrix $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ genau dann eine Ähnlichkeitsmatrix, wenn die beiden Bedingungen gelten.

□

Korollar 2.1.16.
Eine holomorphe Funktion ist genau dann konform im Punkt $z \in U$, wenn $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \neq 0$. Holomorphe Funktionen erhalten die Orientierung.

Definition 2.1.17
*Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ in einen heißt (komplex-)*analytisch, *wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine offene Kreisschreibe $B_\rho(z_0) \subset U$ und eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass die Funktion f sich um z_0 in eine absolut summierbaren Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entwickeln lässt, so dass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für jedes $z \in B_\rho(z_0)$.*

Bemerkung 2.1.18. a) Die a_n sind eindeutig bestimmt durch $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$.

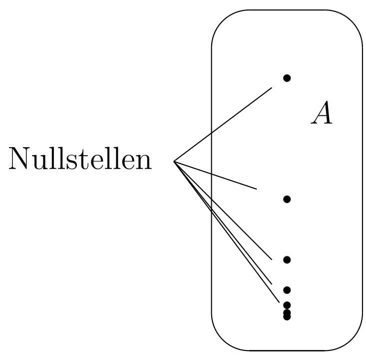
b) Wir werden später zeigen, dass jede auf der offenen Menge U holomorphe Funktion auf U analytisch ist.

Satz 2.1.19. Die Nullstellen einer analytischen Funktion

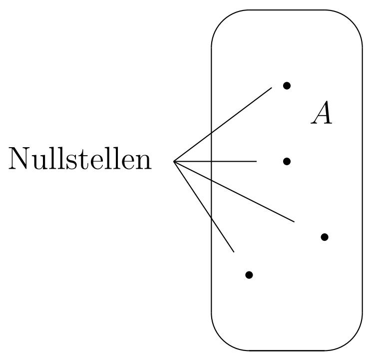
$$f\colon U \to \mathbb{C}, \quad U \text{ offen in } \mathbb{C}, U \neq \emptyset$$

sind *isoliert*, d.h. ist $z_0 \in U$ mit $f(z_0) = 0$, so gibt es ein $r > 0$, so dass entweder $f(z) = 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$ gilt, oder $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Mit anderen Worten: Ist f analytisch auf einem Gebiet A und dort nicht identisch Null, so gibt es in A keine konvergente Folge von Nullstellen von f:



nicht so,



sondern so.

Beweis.
Es gibt ein $\rho > 0$, so dass $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für alle $z \in B_\rho(z_0) \subset U$ ist. Es kann sein, dass alle $a_n = 0$ sind, dann ist

$$f(z) = 0 \text{ für alle } z \in B_\rho(z_0).$$

Anderenfalls gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0 \text{ aber } a_k \neq 0. \text{ Dann ist}$$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

für $z \in B_\rho(z_0)$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

konvergiert dann nach dem Kriterium von Cauchy-Hadamard auch dort gleichmäßig, wo f konvergiert, und definiert eine stetige Funktion $g\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$.

Zu $\epsilon := \dfrac{|a_k|}{2}$ gibt es also ein r mit $0 < r \leq \rho$ und

$$|g(z) - g(z_0)| = |g(z) - a_k| \leq \epsilon \quad \forall z \in B_r(z_0),$$

also $|g(z)| \geq |a_k| - |g(z) - a_k| > |a_k| - \dfrac{|a_k|}{2} = \dfrac{|a_k|}{2} > 0$,
also $g(z) \neq 0$ und damit auch

$$f(z) = (z-z_0)^k \cdot g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_r(z_0).$$

□

2.2 Komplexe Kurvenintegrale

Definition 2.2.1

1. *Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ heißt (holomorphe)* Stammfunktion *von f auf U, falls F auf U holomorph ist und für ihre komplexe Ableitung $F'(z) = f(z)$ auf U gilt.*

2. *Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein nicht nur aus einem Punkt bestehendes kompaktes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so nennen wir γ eine* Kurve *oder (im Folgenden auch kurz) einen* Weg *in $\mathbb{C}$. Das Bild $|\gamma| := \gamma(I)$ nennen wir die* Spur *des Weges. (Sie kann durchaus Selbstüberschneidungen haben.) Gilt $|\gamma| \subset U \subset \mathbb{C}$, so nennen wir γ eine Kurve in U.*

3. *Der Punkt $\gamma(a)$ heißt* Anfangspunkt, *der Punkt $\gamma(b)$* Endpunkt *der Kurve. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ* geschlossene Kurve. *Ist γ konstant, so sagen wir, γ reduziere sich auf einen Punkt.*

4. *Mit $\gamma\colon I := [a,b] \to \mathbb{C}$ ist auch $\gamma^{\leftarrow}\colon I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^{\leftarrow}(t) = \gamma(a+b-t)$ wieder eine Kurve, die zu γ* entgegengesetzte Kurve.

5. *Sei $I_1 = [b, c]$ ein weiteres kompaktes Intervall und $I_2 := I \cup I_1$. Ist dann $\gamma_1 \colon I_1 \to \mathbb{C}$ eine auf I_1 definierte Kurve mit $\gamma_1(b) = \gamma(b)$, so definieren wir die* Aneinanderreihung *als die Kurve*
$$(\gamma \vee \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma(t) \text{ für } t \in I, \\ \gamma_1(t) \text{ für } t \in I_1, \end{cases}$$
die auf I_2 definiert ist.

Manchmal arbeitet man auch in der Funktionentheorie etwas allgemeiner mit Wegen, die Stammfunktionen Lebesgue-integrierbarer Funktionen sind.

Definition 2.2.2
Sind γ_1, γ_2 zwei auf I_1 bzw. I_2 definierte Kurven, so nennen wir γ_1 und γ_2 äquivalent*, wenn eine monoton wachsende bijektive Abbildung $\varphi \colon I_1 \to I_2$ existiert, so dass φ und φ^{-1} stückweise stetig differenzierbar sind und $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ gilt.*

Bemerkungen 2.2.3.

1. Man macht sich leicht klar, dass eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege vorliegt.

2. Ist der Weg γ auf dem Intervall $I = [a, b]$ definiert, so gibt es auf jedem anderen Intervall $I_1 := [c, d]$ einen zu γ äquivalenten Weg γ_1: Dazu finde eine affine bijektive Abbildung $t \mapsto \varphi(t) = \alpha t + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ von I_1 auf I und betrachte $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$.

3. Betrachte nun auf $\mathbb{C}$ die Standardkoordinate z als komplexwertige Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, nämlich die Identität. Ihr Differential $\mathrm{d}z$ ist eine komplexwertige Einsform auf $\mathbb{C}$. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(z)\mathrm{d}z$ eine stetige komplexwertige Einsform. Wenn wir sie über die von γ parametrisierte ein-dimensionale reelle Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ integrieren, müssen wir die stückweise stetige komplexwertige Einsform
$$\gamma^*(f(z)\mathrm{d}z) = f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$
über das Intervall $[a, b]$ integrieren:
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Definition 2.2.4
Sei γ ein auf $I = [a, b]$ definierter Weg und f eine stetige Abbildung der kompakten Menge $\gamma(I)$ mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner einem komplexen Banachraum E). Das Integral
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$
wird das Integral *von f* längs des Wegs *oder* Wegintegral *entlang γ genannt.*

Die folgenden Aussagen sind klar:

Lemma 2.2.5.

1. Sind die Wege γ und γ_1 äquivalent im Sinne von Definition 2.2.2, so folgt aus der Kettenregel
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

2. Für den dem Weg γ entgegengesetzten Weg $\gamma^{\leftarrow}$ gilt

$$\int_{\gamma^{\leftarrow}} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

3. Ist die Aneinanderreihung zweier Wege γ und γ_1 definiert, so gilt

$$\int_{\gamma\vee\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

4. Sei γ ein *geschlossener* Weg auf $I = [a,b]$. Für beliebiges $c \in I$ betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma_c\colon [c, c+b-a] &\to \mathbb{C} \\ \gamma_c(t) &:= \begin{cases} \gamma(t) & \text{für} \quad c \leq t \leq b \\ \gamma(t-b+a) & \text{für} \quad b \leq t \leq c+b-a \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist auch γ_c ein geschlossener Weg und es gilt

$$\int_{\gamma_c} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

für jede stetige Abbildung $f\colon \gamma(I) \to E$. Das Integral längs eines geschlossenen Weges ist also nicht vom Anfang des geschlossenen Weges abhängig.

Wir legen fest: Ist keine explizite Parametrisierung, sondern nur die Spur eines geschlossenen, ein Gebiet A umrandenden Weges gegeben, über den integriert werden soll, so wählen wir eine Parametrisierung mit positivem Umlaufsinn.

Beispiel 2.2.6.

1. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z^2$. Durch $F(z) := \frac{1}{3}z^3$ ist eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{C}$ gegeben. Für den Weg

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) := t \cdot (1+i)$$

ist das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(t(1+i)) \cdot (1+i)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2(1+i)^3\mathrm{d}t \\ &= (-2+2i)\frac{1}{3}t^3 \Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}(1-i). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass φ kein geschlossener Weg ist.

2. Sei f wie in 1.; für den geschlossenen Weg φ

$$\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \varphi(t) := re^{it} \text{ mit festem } r > 0$$

ist das Kurvenintegral

$$\int_{\varphi} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (re^{it})^2 ire^{it}\mathrm{d}t = ir^3 \int_0^{2\pi} e^{3it}\mathrm{d}t = \frac{ir^3}{3i}e^{3it} \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

3. Für denselben geschlossenen Weg φ wie in 2. betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C} \text{ mit } f(z):=\frac{1}{z}.$$

Dann besitzt f auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfunktion, weil der komplexe Logarithmus $\log\colon \mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ nach Beispiel 2.1.10 nur auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^*\setminus\mathbb{R}_-$ differenzierbar ist. Es gilt

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}}\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Bemerkung 2.2.7.
Die Funktion $f\colon U\to\mathbb{C}$ habe eine Stammfunktion F auf U. Sei $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ ein Weg in U. Nach der Kettenregel ist die Ableitung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} G\colon [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & F(\varphi(t)) \end{array}$$

gleich

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Also gilt

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{\text{(Hauptsatz)}}{=} G(b)-G(a) = F(\varphi(b))-F(\varphi(a)).$$

Ist insbesondere der Weg φ geschlossen, also $\varphi(a)=\varphi(b)$, so folgt $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Lemma 2.2.8 (Übung)**.** Sei $f\colon U\to\mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ ein (stückweise stetig differenzierbarer) Weg. Dann gilt:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{z\in|\gamma|}|f(z)|L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma)=\int\limits_a^b|\gamma'(t)|\mathrm{d}t$ die Weglänge ist.

Definition 2.2.9
Seien γ_0,γ_1 zwei auf demselben kompakten Intervall I definierte Kurven und U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, die sowohl $\gamma_0(I)$ als auch $\gamma_1(I)$ umfasst.

1. *Eine* Homotopie *von γ_0 in γ_1 innerhalb von U ist eine stetige Abbildung*

   $$\varphi\colon I\times[\alpha,\beta]\to U$$

   mit $\alpha<\beta$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so dass $\varphi(t,\alpha)=\gamma_0(t)$ und $\varphi(t,\beta)=\gamma_1(t)$ für alle $t\in I$ gilt.

   (Man beachte: Wir setzen nicht voraus, dass beide Wege gleiche Anfangs- und Endpunkte haben, und dass die Homotopie Anfangs- und Endpunkte festlässt!)

   Eine Kurve γ_0 heißt homotop *zu einer Kurve γ_1 in U, wenn es eine Homotopie von γ_0 in γ_1 in U gibt.*

2. *Offenbar ist für jedes feste $\xi \in [\alpha, \beta]$ die Abbildung $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ eine Kurve in U. Sind γ_0 und γ_1 geschlossene Kurven, so nennen wir φ eine* Konturhomotopie *von γ_0 in γ_1 innerhalb von U, falls $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ für jedes $\xi \in [\alpha, \beta]$ eine* geschlossene *Kurve ist. Sagen wir, zwei* geschlossene *Kurven seien innerhalb U homotop, so soll das immer besagen, dass eine Konturhomotopie (und nicht nur eine Homotopie) existiert.*

3. *Ein Weg, der homotop zu einem konstanten Weg ist, heißt auf diesen Punkt* zusammenziehbar. *Ein* einfach zusammenhängendes Gebiet *$U \subset \mathbb{C}$ ist eine zusammenhängende offene Menge mit der Eigenschaft, dass jede geschlossene Kurve in U innerhalb von U homotop zu einer geschlossenen Kurve ist, die sich auf einen Punkt reduziert.*

Satz 2.2.10.
Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die Relation *innerhalb von U homotop sein* ist eine Äquivalenzrelation sowohl von Kurven als auch von geschlossenen Kurven.

Beweis.

1. Die Reflexivität folgt aus der im zweiten Argument konstanten Homotopie $\varphi(t, \xi) = \gamma(t)$ für alle $\xi \in [\alpha, \beta]$.

2. Ist $\varphi \colon I \times [\alpha, \beta] \to U$ eine Homotopie von γ_0 auf γ_1, so ist,
$$(t, \xi) \mapsto \varphi(t, \alpha + \beta - \xi)$$
eine Homotopie von γ_1 auf γ_0 in U. Das zeigt die Symmetrie.

3. Die Transivität sieht man folgendermaßen: Ist andererseits $\psi \colon I \times [\alpha', \beta'] \to U$ eine Homotopie von γ_1 auf γ_2 in U, so können wir eine Homotopie von γ_0 auf γ_2 in U definieren:
$$\begin{aligned} \theta \colon I \times [\alpha, \beta' + \beta - \alpha'] &\to U \\ \theta(t, \xi) &:= \begin{cases} \varphi(t, \xi) \text{ für } \alpha \le \xi \le \beta \\ \psi(t, \xi + \alpha' - \beta) \quad \text{für} \quad \beta \le \xi \le \beta' + \beta - \alpha'. \end{cases} \end{aligned}$$
Beide Vorschriften liefern die gleiche Funktion für $\xi = \beta$. Man überlegt sich leicht, dass die Vorschrift stetig ist, Werte in U annimmt und dass gilt $\theta(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ und $\theta(t, \beta' + \beta - \alpha') = \gamma_2(t)$ für alle $t \in I$.

□

Bemerkungen 2.2.11.

1. Jedes sternförmige Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend: Ist U sternförmig in Bezug auf den Punkt $a \in U$ und ist γ irgend eine geschlossene Kurve in U, dann ist
$$\varphi(t, \xi) = a + (1 - \xi)\,(\gamma(t) - a)$$
für $0 \le \xi \le 1$ eine Konturhomotopie von γ in eine auf den Punkt a reduzierte geschlossene Kurve.

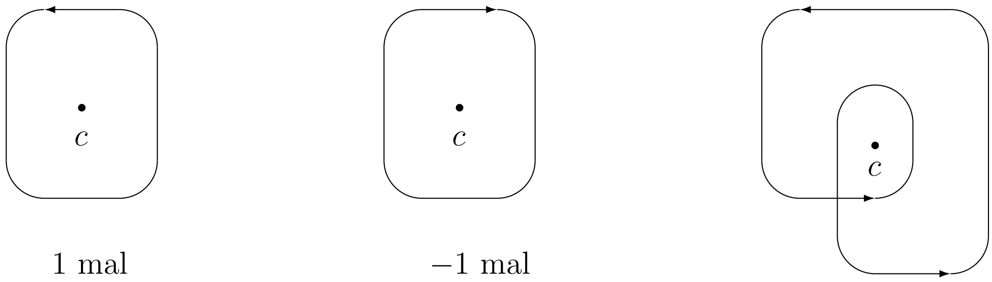
2. Jede zu einer einfach zusammenhängenden Menge homöomorphe offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

3. Die punktierte komplexe Ebene $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend: Man betrachte etwa den Weg
$$\begin{array}{rcl}\varphi_n\colon [0,2\pi] & \to & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ t & \mapsto & \exp(int)\end{array}$$
mit $n \neq 0$. (Es wird später noch klar werden, dass dieser Weg in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nicht zusammenziehbar sein kann.)

4. Die Aneinanderreihung $\gamma \vee \gamma^{\leftarrow}$ von γ und $\gamma^{\leftarrow}$ ist stets ein geschlossener Weg, der homotop zu einer auf einen Punkt reduzierten Kurve ist.

Bemerkungen 2.2.12.

1. Man überlegt sich, dass die Aneinanderreihung von Wegen auf Homotopieklassen assoziativ wird, aber nicht kommutativ. Für die Berechnung von Wegintegralen wird es es nützlich sein, zu wissen, wieviele Male (in positiver Umlaufrichtung) ein geschlossener Weg γ um einen (oder mehrere) Punkte $c \notin |\gamma|$ herumläuft. Das ist bereits durch die *Homologieklasse eines Weges* bestimmt: Homotopieklassen werden so zu Homologieklassen zusammengefügt, dass bei gegebenem fixierten Punkt $p \in U$ die Aneinanderreihung von Wegen mit Anfangs- und Endpunkt p auf Homologieklassen zu einer kommutativen Verknüpfung wird (die wir dann auch additiv schreiben).



1 mal $\qquad$ -1 mal $\qquad$ 2 mal

2. Zum Beispiel läuft der Weg
$$\varphi_n\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_n(t) := e^{int},$$
dessen Bild der Einheitskreis $U(1) := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ ist, n-mal um den Nullpunkt herum. Er heißt der *n-fach durchlaufene Einheitskreis*.
Für den Weg φ_n ist
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_n} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}}\mathrm{d}t = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = n.$$
Im folgenden Satz, den wir aus Zeitgründen nicht beweisen, berechnen wir analog diese *Windungszahl* $n \in \mathbb{Z}$ für beliebige Wege.

Satz 2.2.13 (und Definition)**.** Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \notin |\varphi|$. Dann ist
$$j(\zeta;\varphi) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta}$$
eine ganze Zahl. Sie heißt *Index* oder die *Windungszahl* des Punktes ζ in Bezug auf den Weg φ oder auch *Index* des Weges φ in Bezug auf den Punkt ζ.

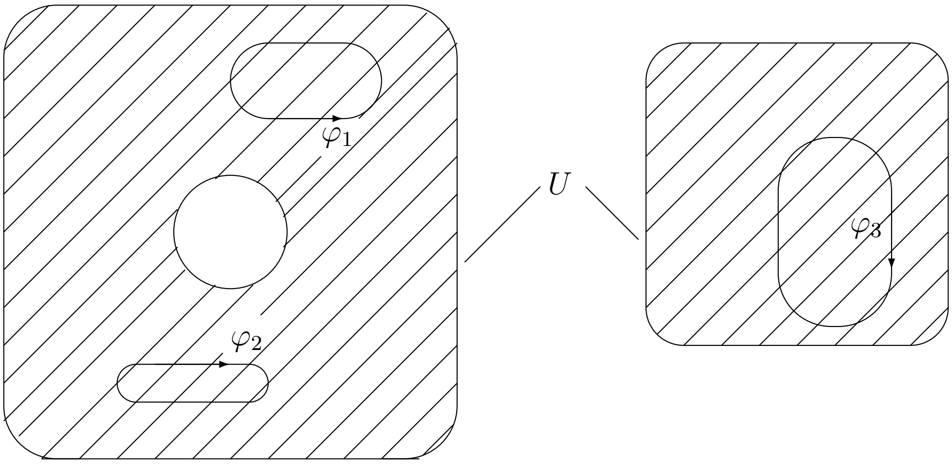
Definition 2.2.14

1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ und seien*
$$\varphi\colon [a,b] \longrightarrow U, \quad \psi\colon [a_1,b_1] \longrightarrow U$$
zwei geschlossene (stückweise stetig differenzierbare) Wege in U. Dann heißen φ und ψ homolog in U*, in Zeichen:*
$$\varphi \sim_U \psi, \text{ wenn}$$
$$\forall\, x \in \mathbb{C} \setminus U\colon j(x;\varphi) = j(x;\psi)$$
gilt, d.h. wenn φ und ψ um alle Punkte des Komplements von U gleich oft herumlaufen.

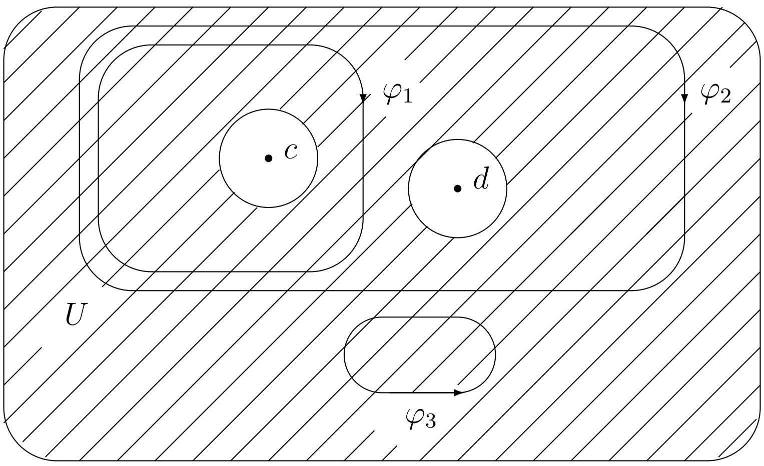
   Ist ein geschlossener Weg φ in U homolog zu einem Weg φ_0, der nur aus einem Punkt $z_0 \in U$ besteht, so heißt φ nullhomolog *in U, man schreibt*
$$\varphi \sim_U 0.$$

2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und*
$$\Gamma := ((\gamma_\ell, k_\ell))_{\ell \in \{1,\dots,n\}}$$
eine Familie von Paaren von geschlossenen (stückweise stetig differenzierbaren) Wegen γ_ℓ in U und ganzen Zahlen k_ℓ. Man schreibt dafür
$$\Gamma = \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell \gamma_\ell$$
und nennt Γ einen Zyklus *oder* Zykel *in U. Für stetiges $f\colon U \to \mathbb{C}$ setzt man*
$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell \int_{\gamma_\ell} f(z)\mathrm{d}z.$$
Man nennt $|\Gamma| := \bigcup_{\ell=1}^{n} |\gamma_\ell|$ die Spur *von Γ, und für $c \in \mathbb{C}, c \notin |\Gamma|$ nennt man*
$$j(c;\Gamma) := \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell j(c;\gamma_\ell)$$
den Index *von c bezüglich Γ. Es heißt Γ* nullhomolog in U *, wenn*
$$\forall\, c \in \mathbb{C} \setminus U\colon j(c;\Gamma) = 0 \textit{ ist.}$$

Beispiel 2.2.15. 1) Die folgenden Wege sind in U nullhomolog:



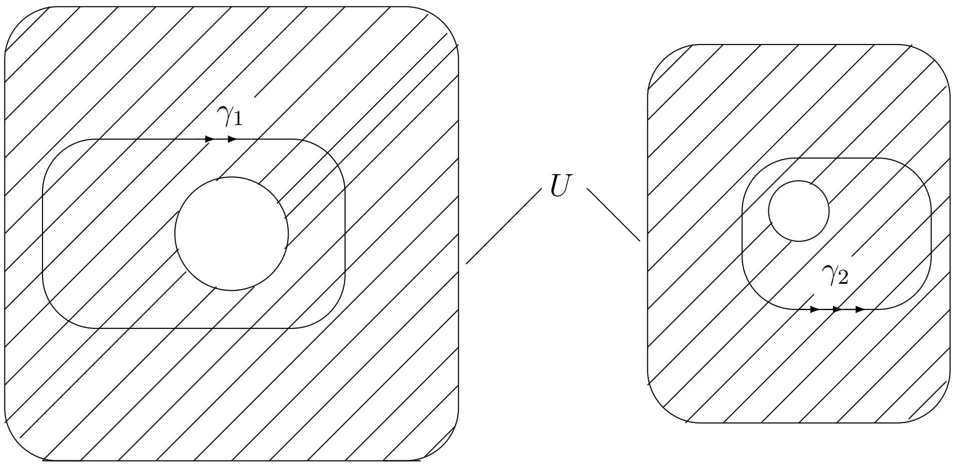
2) Es gilt
$j(c;\varphi_1) = -1, j(c;\varphi_3) = 0$, also $\varphi_1 \not\sim_U \varphi_3$



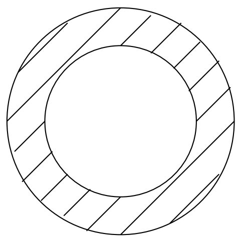
$j(d;\varphi_1) = 0, j(d;\varphi_2) = -1,$ also $\varphi_1 \not\sim_U \varphi_2$,
$j(d;\varphi_2) = -1, j(d;\varphi_3) = 0,$ also $\varphi_2 \not\sim_U \varphi_3$.

3) Wir können statt über einzelne Wege in U also auch über Zyklen integrieren, die keine Wege sind, wie z. B.

$$2\gamma_1 + 3\gamma_2$$



Bemerkung 2.2.16. Ist U berandet durch Wege γ_ℓ, so dass (bezüglich des Umlaufsinns der Wege) U stets links liegt, so schreiben wir für das Integral über den durch $\sum_\ell \gamma_\ell$ gegebenen Zyklus kurz $\int\limits_{\partial U}$, vgl. (2.2.5).



2.3 Cauchyscher Integralsatz und Integralformel

Bemerkung 2.3.1. Wir wollen uns nun überlegen, dass es bei der Berechnung von Wegintegralen von einem geschlossenen Weg nur auf die umschlossenen Singularitäten ankommt, also auf die Punkte, in denen f nicht komplex differenzierbar (bzw. nicht definiert) ist.

Gibt es zu $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion auf U, so ist das Wegintegral von f für jeden geschlossenen Weg in U null, siehe (2.2.7).

Sei f komplex differenzierbar. Dann betrachten wir die komplexwertige Einsform

$$\omega = f\mathrm{d}z = (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

auf U, wobei u, v reellwertige Funktionen sind. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= (u_y + iv_y)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x) + i(u_x + iv_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (-u_y - v_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + i(-v_y + u_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

Wir erinnern an das Lemma von Poincaré: Über jeder sternförmigen offenen Menge ist jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form ($k \geq 1$) auch exakt.

Und wir erinnern an die Integralsätze: Sei $\bar{A}$ (hinreichend) glatt berandetes Kompaktum in $\mathbb{R}^2$, A offen, ∂A der orientierte Rand von A. Nach dem Satz von Stokes ist für jede auf einer

Umgebung von $\bar{A}$ definierte stetig differenzierbare 1-Form:

$$\int_{\partial A} \omega \quad = \quad \int_{A} \mathrm{d}\omega$$

Wir folgern (mit Lücken: unter anderem muss man die Stetigkeit der Ableitung komplex-differenzierbarer Funktionen zeigen) hieraus für $\omega = f(z)\mathrm{d}z$:

$$\int_{\partial A} f(z)\mathrm{d}z = \int_{A} \mathrm{d}(f(z)\mathrm{d}z) = \int_{A} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{0} \underbrace{\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z}_{2i\ dx \wedge dy} = 0.$$

Indem man noch für Zyklen argumentiert, und insbesondere Wege aneinanderreiht, kommt man zum folgenden für die Funktionentheorie zentralen Satz (siehe z.B. [FL]).

Theorem 2.3.2 (Cauchyscher Integralsatz)**.**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $U \neq \emptyset$, $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein in U nullhomologer Zyklus. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Speziell gilt: Ist U einfach zusammenhängend, so ist $\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U.

Korollar 2.3.3. Sei U offen in $\mathbb{C}$, $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, und Γ_1, Γ_2 seien in U homologe Zyklen, d.h. $j(c; \Gamma_1) = j(c; \Gamma_2) \quad \forall c \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Beweis.
Seien

$$\Gamma_1 = \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell \gamma_\ell \text{ und } \Gamma_2 = \sum_{\ell=n+1}^{n+m} (-k_\ell)\gamma_\ell$$

zwei in A homologe Zyklen, dann ist

$$\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2 = \sum_{\ell=1}^{n+m} k_\ell \gamma_\ell$$

nullhomolog in A, und aus

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0 \text{ folgt die Behauptung.}$$

□

Beispiel 2.3.4. Sei $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0,-2\}\to\mathbb{C}, z\mapsto \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)$. Ist φ ein beliebiger geschlossener Weg, der $\{0,-2\}$ nicht trifft und der Windungszahl 0 um $c_1 = -2$ und Windungszahl $2n$ um $c_2 = 0$ hat, so stimmt das Integral $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z$ überein mit $2\pi i n$, der Hälfte des Integrals von $\frac{1}{z}$ über den $2n$-fach durchlaufenen Einheitskreis.

Korollar 2.3.5. Es seien γ_1 und γ_2 zwei Wege in einer offenen Menge $U\subset\mathbb{C}$ mit dem gleichen Anfangspunkt u und dem gleichen Endpunkt v. Es gebe ferner eine Homotopie

$$\varphi\colon [a,b]\times[\alpha,\beta]\to U$$

von γ_1 in γ_2 innerhalb von U, welche Anfangs- und Endpunkte festlässt, d. h. $\varphi(a,\xi)=u$ und $\varphi(b,\xi)=v$ für alle $\xi\in[\alpha,\beta]$. Dann gilt für jede auf U holomorphe Funktion f die Beziehung

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Beweis.
Der Weg $\gamma_3(t) := \gamma_1^{\leftarrow}(t-b+a)$ mit $t\in[b,2b-a]$ ist zu $\gamma_1^{\leftarrow}$ äquivalent. Die Aneinanderreihungen $\gamma_1\vee\gamma_3$ und $\gamma_2\vee\gamma_3$ sind jeweils geschlossene Wege. Sie sind auch in U homotop:

$$\psi(t,\xi) := \begin{cases} \varphi(t,\xi) \text{ für } a\le t\le b,\\ \gamma_3(t) \text{ für } b\le t\le 2b-a,\end{cases}$$

ist ein Konturhomotopie innerhalb von U. Der Cauchysche Integralsatz 2.3.2 bzw. Korollar 2.3.3 liefert

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z$$

und damit die Behauptung. □

Wir halten noch fest:

Bemerkungen 2.3.6.

1. Sei $\gamma\colon I\to\mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Der Index $j(\cdot;\gamma)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplements $\mathbb{C}\setminus\gamma(I)$ der kompakten Menge $\gamma(I)$ konstant.
2. Ist ein geschlossener Weg γ in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)}$ enthalten, so ist $j(z;\gamma)=0$ für jedes z mit $|z-z_0|>r$.

Definition 2.3.7 *Sei U offen in $\mathbb{C}$, $\zeta\in U$ und $f\colon U\setminus\{\zeta\}\to\mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt ζ* hebbare Singularität *von f, wenn es eine Umgebung $B_\varepsilon(\zeta)\subset U$ von ζ gibt, so dass f auf $B_\varepsilon(\zeta)\setminus\{\zeta\}$ definiert, beschränkt und differenzierbar ist.*

Beispiel 2.3.8. 1) Sei $f\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C},\quad f(z):=e^{\frac{1}{z}}$, so ist 0 keine hebbare Singularität von f, denn wegen $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} e^x=\infty$ gibt es keine Umgebung U von 0, so dass f in $U\setminus\{0\}$ beschränkt ist.

2) Sei $f\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C},\quad f(z):=\frac{\sin z}{z}$. Dann ist 0 eine hebbare Singularität von f: Wegen

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{\sin z}{z} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{\sin z-\sin 0}{z-0} = \cos 0$$

gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left|\frac{\sin z}{z} - 1\right| < 1, \text{ also } \left|\frac{\sin z}{z}\right| < 2 \text{ für } z \in B_\delta(0).$$

(Es stellt sich heraus, dass man f in jeder hebbaren Singularität stetig ergänzen kann.)

Bemerkung 2.3.9 (Übung)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, $\zeta \in U$,

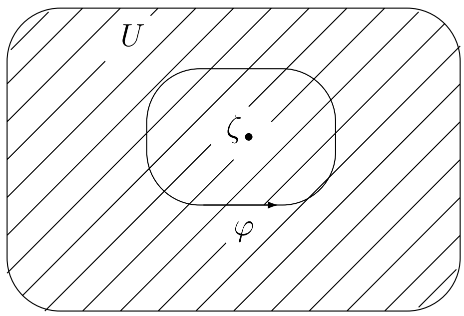
$$f\colon U \setminus \{\zeta\} \to \mathbb{C}$$

sei differenzierbar und ζ sei eine hebbare Singularität von f. Sei

$$\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$$

ein geschlossener Weg mit $|\varphi| \subset U \setminus \{\zeta\}$. Es sei φ nullhomolog in U. Dann ist

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



Dies folgert man mit Hilfe der Formel aus (2.2.8).

Theorem 2.3.10 (Cauchysche Integralformel)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, φ ein geschlossener Weg in U, und φ sei nullhomolog in U. Weiterhin sei $\zeta \in U$, $\zeta \notin |\varphi|$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z = j(\zeta;\varphi)\cdot f(\zeta).$$

Hierbei wird für die Windungszahl $j(\zeta;\varphi)$ die offene Menge $U \setminus \{\zeta\}$ betrachtet.

Beweis.
Es ist $g(z) := \dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$ auf $U \setminus \{\zeta\}$ definiert und holomorph. Es existiert

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\neq\zeta}} g(z) = f'(\zeta),$$

also gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\tilde{U}$ von ζ, so dass gilt

$$z \in \tilde{U} \setminus \{\zeta\} \Longrightarrow |g(z) - f'(\zeta)| < \varepsilon,$$

also $|g(z)| < |f'(\zeta)| + \varepsilon$ für $z \in \tilde{U} \setminus \{\zeta\}$. Damit ist also g auf $\tilde{U} \setminus \{\zeta\}$ beschränkt und ζ ist somit hebbare Singularität von g. Deshalb ist

$$\int_{\varphi} g(z)\mathrm{d}z = 0, \text{ also}$$

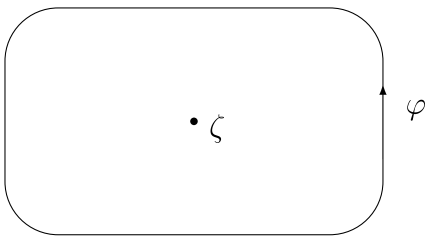
$$\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z = \int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}z$$

und die rechte Seite ist, nach (2.2.13), gleich

$$f(\zeta) \cdot 2\pi i \cdot j(\zeta; \varphi).$$

□

Bemerkung 2.3.11. 1) Die Formel ist oft nützlich, um Integrale auszurechnen.
2) Ist $j(\zeta; \varphi) \neq 0$, so gilt



$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i \cdot j(\zeta; \varphi)} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z,$$

d.h. man kann den Funktionswert $f(\zeta)$ einer holomorphen Funktion f in einem Punkt ζ im Inneren von $|\varphi|$ ausrechnen, wenn man $f(z)$ für $z \in |\varphi|$, also auf dem Rand der von φ eingeschlossenen Menge, kennt.

Betrachtet man eine holomorphe Funktion f und eine Kreisscheibe um ζ, so ist $f(\zeta)$ insbesondere durch ein Mittel über den Rand der Kreisscheibe festgelegt; ein entsprechender Satz gilt allgemein für harmonische Funktionen (vgl. MfP III 4.2.1), und es sind ja nach Korollar 2.1.9 die beiden reellwertigen Funktionen $\mathrm{Re}f$ und $\mathrm{Im}f$ harmonisch, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist.

Theorem 2.3.12. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f komplex-analytisch. Genauer: Sei $z_0 \in U$ und $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, so dass $B_\rho(z_0) \subset U$ ist, dann gibt es eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit einem Konvergenzradius $\geq \rho$, so dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ für alle } z \in B_\rho(z_0),$$

und für jedes r mit $0 < r < \rho$ gilt

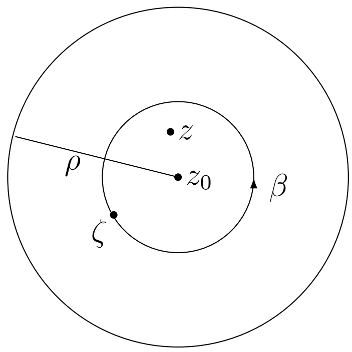
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

wobei $\partial B_r(z_0)$ der einmal positiv durchlaufene Rand von $B_r(z_0)$ ist. Des Weiteren gilt für die Koeffizienten a_n:

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \text{ mit } M_r := \sup\{|f(\zeta)|, \zeta \in \overline{B_r(z_0)}\}$$

für jedes r mit $0 < r < \rho$.

Beweis.
Für $z \in B_\rho(z_0)$ wählen wir ein festes r mit $|z - z_0| < r < \rho$ und betrachten den Weg $\beta\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \beta(t) := z_0 + re^{it}$.



Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\beta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Es gilt für $\zeta \in |\beta|$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \text{ für } |z - z_0| < |\zeta - z_0|.$$

Für $\zeta \in |\beta|$ ist $|\zeta - z_0| = r > |z - z_0|$. Also folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\beta(t))}{(\beta(t) - z_0)^{n+1}} \cdot \beta'(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(z_0 + re^{it}) \cdot i}{r^n e^{int}} \right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Sei nun $g_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, g_n(t) := \dfrac{(z - z_0)^n f(z_0 + re^{it}) \cdot i}{r^n e^{int}}$. Die Funktion f ist in $B_\rho(z_0)$ holomorph, insbesondere stetig, also auf der kompakten Menge $\overline{B_\rho(z_0)}$ beschränkt:

$$|f(\zeta)| \leq M_r \text{ für } \zeta \in \overline{B_r(z_0)}.$$

Dann ist

$$|g_n(t)| \leq \frac{|z - z_0|^n M_r}{r^n} = M_r (\underbrace{\frac{|z - z_0|}{r}}_{<1})^n$$

Auf $[0, 2\pi]$ sind die Summanden $g_n(t)$ beschränkt und es existiert eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |g_n(t)|$, also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ gleichmäßig und absolut auf $[0, 2\pi]$, und wir können gliedweise integrieren:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(z-z_0)^n f(re^{it}+z_0)i}{r^n e^{int}} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta, \end{aligned}$$

wobei dieses Integral unabhängig von r ist für $r < \rho$.
Mit $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$ folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Die letzte Aussage des Satzes folgt aus der Formel für a_n im Beweis oben:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

mit der Abschätzungsformel (2.2.8), wobei $L(\beta) = 2\pi r$. □

Korollar 2.3.13.

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ einmal komplex differenzierbar. Dann ist die Funktion f in U beliebig oft komplex differenzierbar und somit beliebig oft stetig differenzierbar. Es folgt auch, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonische glatte reellwertige Funktionen sind.

2. Die Nullstellenmenge jeder nicht konstanten holomorphen Funktion ist diskret.

Beweis.
Nach Satz 2.3.12 ist f in jedem $z \in U$ analytisch,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = f(z).$$

Nach Satz 2.1.5, c) ist

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1},$$

und wir erhalten erneut eine komplex differenzierbare Funktion auf U. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen analytischer Funktionen 2.1.19 folgt auch die zweite Behauptung. □

Satz 2.3.14 (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen)**.** Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(z_0)} \subset U$. Dann gilt für $r < \rho$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

oder allgemeiner, für einen in U nullhomologen Weg φ mit $z_0 \notin |\varphi|$:

$$j(z_0;\varphi) \cdot f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Beweis.
Mit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $|z-z_0| < \rho$ und der Formel aus 2.3.12 folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \text{ für jedes } r \text{ mit } 0 < r < \rho.$$

Aus Satz 2.1.5 erhält man $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ und die Behauptung. □

Bemerkung 2.3.15. Es gibt offenbar nicht konstante reell-differenzierbare Funktionen wie z.B. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und beschränkt sind. Aus der Abschätzungsformel für die Koeffizienten a_n im Satz (2.3.12) erhält man jedoch für komplex-differenzierbare Funktionen den folgenden Satz.

Satz 2.3.16 (Satz von Liouville)**.** Jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe beschränkte Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner einem komplexen Banachraum E) ist konstant.

Beweis.
Ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Da f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, hat man für jedes $\rho > 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < \rho,$$

die nach dem Cauchyschen Integralsatz nicht von ρ abhängt, also gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

für beliebiges $r > 0$. Aus der Abschätzungsformel wissen wir

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Da hier r beliebig groß gewählt werden kann, folgt

$$|a_n| = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

Also $f(z) = a_0$. $\square$

Mit Hilfe des Satzes von Liouville erhält man einen kurzen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra (siehe MfP I):

Korollar 2.3.17 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Es sei $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_n z^n$ eine nicht-konstante Polynomfunktion mit komplexen Koeffizienten. Dann hat $P(z)$ eine komplexe Nullstelle.

Beweis.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es ist $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ohne Einschränkung sei $\deg P = n > 1$ und $a_n = 1$. Dann ist

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

nach der Quotientenregel in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Mit

$$R := 2n \cdot \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|, \frac{1}{2n}\} \geq 1,$$

gilt für $|z| \geq R$:

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|z|}{2n}|z|^k, \\ &\geq |z|^n - n \cdot \frac{|z|^n}{2n} \geq \frac{R^n}{2}, \\ \frac{1}{|P(z)|} &\leq \frac{2}{R^n} \text{ für } |z| \geq R, \end{aligned}$$

außerhalb der kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$ ist f also beschränkt. Auch in der kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$ ist die stetige Funktion f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant in $\mathbb{C}$ und damit auch P. Aber P hat Grad n. $\square$

2.4 Laurentzerlegung

Der Satz von Liouville zeigt, dass es „wenige“ holomorphe Funktionen gibt; zum Beispiel gibt es wenige auf $\mathbb{C}$ doppelt-periodische Funktionen. Es ist daher wichtig, eine größere Funktionenklasse zur Verfügung zu haben. Dazu lassen wir einzelne Punkte einem Gebiet der komplexen Ebene zu, an denen eine holomorphe Funktion nicht definiert sein muss, sogenannte *isolierte Singularitäten.*

Definition 2.4.1

1. *Unter einer unendlichen Reihe der Form* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ *versteht man das Paar von Reihen*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\right).$$

   Eine solche Reihe heißt konvergent, wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *konvergieren. Dann heißt ihre Summe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *der Grenzwert von* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$.

2. *Analog führt man die Begriffe der absoluten und der gleichmäßigen Konvergenz für solche Reihen ein.*

3. *Eine* Laurentreihe *mit Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und Werten in* $\mathbb{C}$ *ist, wie in 1., gegeben durch die Reihe bzw. Reihen*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}, \text{ mit } a_n \in \mathbb{C},$$

   welche man Hauptteil *bzw.* Nebenteil *nennt. Insbesondere: Die Laurentreihe heißt konvergent in* z, *wenn sowohl der Haupt- als auch der Nebenteil in* z *konvergieren.*

Bemerkung 2.4.2. Bei einer Laurentreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist der Nebenteil eine Potenzreihe in $z-z_0$ und es gibt einen Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ für } |z-z_0| < R \text{ konvergiert,}$$

und der Hauptteil ist eine Potenzreihe in $\zeta := \dfrac{1}{z-z_0}$, es gibt also einen Konvergenzradius $\rho \in [0,\infty]$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$, d. h. für $r := \dfrac{1}{\rho} \in [0,\infty]$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \text{ für } |z-z_0| > r.$$

Insgesamt haben wir also ein (eventuell leeres) *Ringgebiet*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\},$$

in dem die Laurentreihe konvergiert.
Des Weiteren gilt:
(i) Es seien r', R' mit $r < r' < R' < R$, dann konvergiert die Laurentreihe in der Menge $\{z \in \mathbb{C} | r' \leq |z-z_0| \leq R'\}$ gleichmäßig.
(ii) Für $|z-z_0| < r$ oder $|z-z_0| > R$ divergiert die Laurentreihe.

Mit (i) erhält man:

Korollar 2.4.3. Die Laurentreihe $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiere im Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\}.$$

Dann ist durch f dort eine komplex differenzierbare Funktion gegeben, mit

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Ist $a_{-1} = 0$, so ist

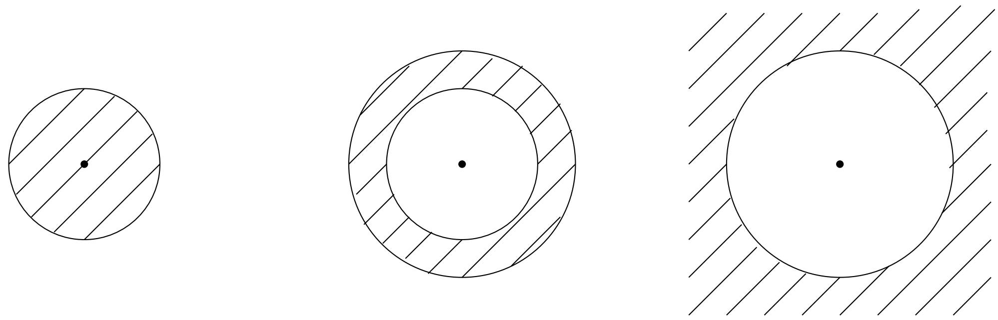
$$F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \text{ für } z \in K_{r,R}(z_0)$$

eine Stammfunktion von f.

Beispiel 2.4.4. Sei

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Dann hat man drei Kreisringe um 0, in denen f differenzierbar ist, und man erhält mit der geometrischen Reihe:



$B_1(0)$ $K_{1,2}(0)$ $K_{2,\infty}(0)$

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ in } B_1(0),$$

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \text{ in } K_{1,2}(0),$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \cdot \frac{1}{z^n} \text{ in } K_{2,\infty}(0).$$

Satz 2.4.5 (Integralformel für die Laurentkoeffizienten)**.** Konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ im Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ gegen die Funktion f, so gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

für jeden kreisförmigen Weg

$$\kappa_\rho \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \kappa_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}, \text{ mit } \rho \in (r, R).$$

Beweis.
Nach Folgerung 2.4.3 besitzt

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} - \frac{a_n}{z-z_0}$$

eine Stammfunktion in $K_{r,R}(z_0)$, also ist

$$0 = \int_{\kappa_\rho} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta - a_n \underbrace{\int_{\kappa_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0}}_{=2\pi i}.$$

□

Für Folgerung 2.4.3 gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.4.6. Jede in einem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ holomorphe Funktion f besitzt in diesem genau eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$ für $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\rho \in (r, R)$ und

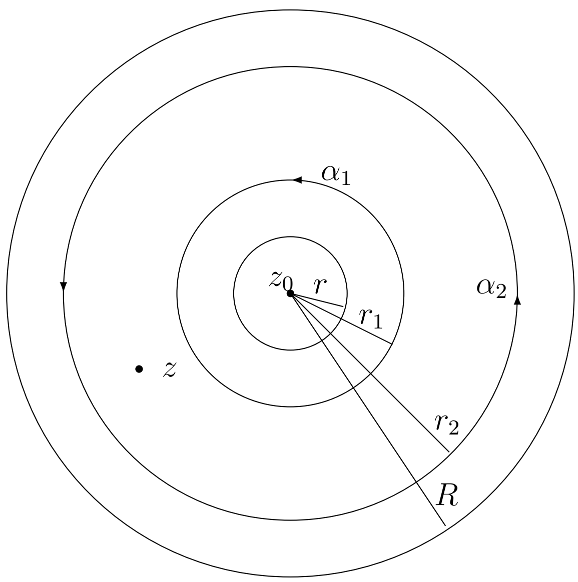
$$\kappa_\rho \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \kappa_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}.$$

Beweis.
Sei $z \in K_{r,R}(z_0)$, dann wählen wir r_1, r_2 mit

$$r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$$

und den Zykel

$$\Gamma := \alpha_2 - \alpha_1 \text{ mit } \alpha_j \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \alpha_j(t) := z_0 + r_j e^{it}.$$



Bezüglich $K_{r,R}(z_0) \setminus \{z\}$ ist $j(z;\Gamma) = j(z;\alpha_2) = 1$, und nach der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta,$$

denn Γ ist nullhomolog in $K_{r,R}(z_0)$, also

$$2\pi i f(z) = \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\alpha_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Für $\zeta \in |\alpha_1|$ haben wir

$$|\zeta - z_0| = r_1, |z - z_0| > r_1, \text{ also } \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1,$$

und wir entwickeln $-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$ in die auf $\{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta \in |\alpha_1|\}$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{p-1}}{(z - z_0)^p}.$$

Wir haben also

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{p=1}^{\infty} b_p (z - z_0)^{-p} \text{ mit } b_p := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{p-1} \mathrm{d}\zeta.$$

Wir setzen $a_{-n} := b_n$ für $n \in \mathbb{N}$; das ergibt den Hauptteil der Laurentreihe.

Für $\zeta \in |\alpha_2|$ haben wir

$$|\zeta - z_0| = r_2, |z - z_0| < r_2, \text{ also } \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1, \text{ und es gilt}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

Das ergibt den Nebenteil der Laurentreihe. Da man r_2 beliebig nahe an R und r_1 beliebig nahe an r wählen kann, und da die a_n nach (2.4.5) eindeutig bestimmt sind, folgt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für } r < |z - z_0| < R,$$

und da sich die Integrale über α_1 und α_2 nicht ändern, wenn man r_1 und r_2 innerhalb von (r, R) ändert, folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

mit beliebigem $\rho \in (r, R)$. □

Beispiel 2.4.7. Die gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ definiert. Wir können sie schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}.$$

Wir suchen die Laurententwicklung von f auf dem Ringgebiet $K_{1,3}(0)$. Für $|z| > 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Für $|z| < 3$ gilt dagegen

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{3})^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Auf dem Ringgebiet $K_{1,3}(0)$ ist somit $f(z) = g(z) + h(1/z)$, mit der für $|z| < 1$ konvergenten Reihe

$$h(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

und der für $|z| < 3$ konvergenten Reihe

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Bemerkung 2.4.8. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und z_0 ein isolierter Punkt von $\{z_0\} \cup \mathbb{C} \setminus U$, d.h. es gibt eine Umgebung V in $\mathbb{C}$ von z_0, die keine weiteren Punkte von $\mathbb{C} \setminus U$ trifft. Es sei

$$f \colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

holomorph. Wir wollen die Art der isolierten Singularität z_0 näher beschreiben. Zunächst sei z_0 eine hebbare Singularität sein, siehe (2.3.7). Ist z_0 hebbar, so kann f holomorph in z_0 fortgesetzt werden:

Satz 2.4.9 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen $z_0 \in U$ und $f \colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei z_0 eine hebbare Singularität von f. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g \colon U \to \mathbb{C}$ mit

$$g|_{U \setminus \{z_0\}} = f.$$

Beweis.
Nach der Definition hebbarer Singularitäten gibt es ein $r > 0$, so dass f in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist, etwa $|f(z)| \leq M$ für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Wir setzen

$$\varphi \colon U \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist φ in $U \setminus \{z_0\}$ differenzierbar, und auch in z_0, denn es existiert

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) \cdot f(z) = 0$$

wegen $|f(z)| \le M$ für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, also ist

$$\varphi'(z_0) = 0.$$

Daher hat φ in $B_r(z_0)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_0 = \varphi(z_0) = 0$ und $a_1 = \varphi'(z_0) = 0$. Somit ist $\varphi(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$,

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} \text{ für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

und $g(z) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}$ ist die gesuchte Fortsetzung von f. □

Definition 2.4.10 *[und Bemerkung] Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und z_0 ein isolierter Punkt von $\{z_0\} \cup \mathbb{C} \setminus U$ und $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph.*

1. *Wir nennen z_0 einen* Pol *von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass z_0 eine hebbare Singularität von $(z - z_0)^k \cdot f(z)$ ist. Das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft heißt die* Polstellenordnung *von z_0. (Es ist z_0 genau dann k-facher Pol von f, wenn*
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \text{ für } z \in U \setminus \{z_0\} \text{ ist,}$$
mit einer in U holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$.)

2. *Wir nennen z_0 einen* wesentlich singulären Punkt *oder eine* wesentliche Singularität *von f, wenn z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.*

3. *Allgemein definieren wir die* Ordnung $\omega(z_0; f)$ *von z_0 bezüglich f wie folgt:*
   - *$\omega(z_0; f) = -\infty$, wenn z_0 eine wesentliche Singularität von f ist.*
   - *$\omega(z_0; f) = -k$, wenn z_0 ein Pol der Ordnung $k \ge 1$ ist. (Man beachte das Vorzeichen: für Pole ist $\omega(z_0; f)$ negativ.)*
   - *$\omega(z_0; f) = m$, wenn $f \neq 0$ und z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von f ist.*
   - *Schließlich setzen wir noch $\omega(z_0; 0) = \infty$ für die konstante Funktion 0.*

Beispiel 2.4.11. Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert ist, hat in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 2.

Bemerkung 2.4.12 (*Laurentzerlegung*)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann hat man eine Laurent-Entwicklung von f um z_0 in $K_{0,R}(z_0)$:

$$f(z) = \varphi(z) + h(z),$$

wobei $\varphi(z)$ der Nebenteil und $h(z)$ der Hauptteil ist, also

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Die Koeffizienten der Laurentreihe sind eindeutig bestimmt, siehe (2.4.5). Deshalb gilt:

1.) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn $h = 0$ ist.

2.) z_0 ist genau dann ein Pol von f, wenn h eine von 0 verschiedene endliche Summe ist, und zwar ist z_0 genau dann ein Pol der Ordnung k, wenn gilt

$$h(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \text{ mit } a_{-k} \neq 0.$$

3.) z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn unendlich viele $a_{-n}, n \in \mathbb{N}$ im Hauptteil $h(z)$ ungleich 0 sind.

Man zeigt leicht:

Lemma 2.4.13.

1. Sind sowohl f als auch g auf $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \ 0 < |z - z_0| < r\}$ definierte holomorphe Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$, so ist $\omega(z_0; f + g) \geq \min(\omega(z_0; f), \omega(z_0; g))$, und es ist $\omega(z_0; fg) = \omega(z_0; f) + \omega(z_0; g)$, falls beide Zahlen $\omega(z_0; f)$ und $\omega(z_0; g)$ endlich sind.
2. Ist f auf U holomorph und ist die Ordnung m von z_0 bezüglich f endlich, so existiert ein r' mit $0 < r' < r$, so dass $1/f$ auf der offenen punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r'$ holomorph ist mit
$$\omega(z_0; 1/f) = -\omega(z_0; f).$$

Beispiel 2.4.14. 1) Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sin \frac{1}{z}$, dann ist für $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^{-1})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{z^{-1}}{1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} \mp \ldots \end{aligned}$$

Das ist die Laurententwicklung von f um 0. Hier sind unendlich viele der a_{-n} ungleich 0 (die mit ungeradem n). Also ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

2) Sei $f\colon B_\pi(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \dfrac{z}{\sin z}$, dann existiert

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

Damit ist 0 also eine hebbare Singularität von f, denn $g\colon B_\pi(0) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z = 0, \\ \dfrac{z}{\sin z} & \text{für } z \neq 0, \end{cases}$$

ist in $B_\pi(0)$ holomorph (mit $g'(0) = 0$) und setzt f fort.

3) Sei $f\colon B_\pi(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \dfrac{1}{\sin z}$. Dann ist $f(z) = \dfrac{1}{z} \cdot g(z)$ mit der in (2) definierten, auf $B_\pi(0)$ holomorphen, Funktion g , also gibt es $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < \pi \text{ und damit}$$

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \text{ mit } a_0 = g(0) = 1 \neq 0,$$

also ist 0 ein Pol der Ordnung 1 von f.

Definition 2.4.15 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Es gebe eine Menge $P \subset U$ von isolierten Punkten, so dass*

(i) $f\colon U \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph ist, und

(ii) die Elemente von P sämtlich Pole von f sind.

Dann heißt f eine meromorphe Funktion *auf U.*

Beispiel 2.4.16. Sei R eine komplexe rationale Funktion, also

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomfunktionen P und Q mit komplexen Koeffizienten und $Q \neq 0$. Dann ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Menge

$$N := \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\} \text{ endlich,}$$

$R\colon \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$ ist holomorph und alle $p \in N$ sind Pole von R, denn nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir $Q(z)$ in Linearfaktoren zerlegen,

$$Q(z) = c \cdot \prod_{q \in N} (z - q)^{s_q} \text{ mit } s_q \in \mathbb{N}, \text{ also}$$

$$R(z) = \frac{1}{(z-p)^{s_p}} \cdot f(z) \text{ mit } f(z) := \frac{P(z)}{c \cdot \prod\limits_{q \in N \setminus \{p\}} (z-q)^{s_q}},$$

und f ist in einer passenden Umgebung von p holomorph. Damit hat R in p also einen Pol der Vielfachheit höchstens s_p, wenn s_p die Vielfachheit der Nullstelle p von $Q(z)$ ist.

Wir wollen noch die Situation an wesentlichen Singularitäten beschreiben:

Theorem 2.4.17 (Satz von Picard)**.**
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann sind nur zwei Fälle möglich: Für jede punktierte Umgebung $\dot{U}$ von z_0 gilt $f(\dot{U}) = \mathbb{C}$, oder es gilt $f(\dot{U}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ für genau ein $c \in \mathbb{C}$.

Mit anderen Worten: eine analytische Funktion nimmt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität z_0 jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme an. Eine komplexwertige Funktion f ist also „extrem nervös“ in der Nähe einer wesentlichen Singularität. Als Beispiel betrachte man die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ um den Punkt $z_0 = 0$.

Die für den Beweis dieser Aussage nötigen Methoden können wir allerdings in dieser Vorlesung nicht bereit stellen. Wir verweisen auf Kapitel 10.4 von Reinhold Remmert und Georg Schumacher: Funktionentheorie 2, dritte Auflage, Springer 2007.

2.5 Der Residuensatz

Wir hatten schon im Korollar 2.4.3 gesehen, dass für jeden geschlossenen Weg φ das Integral $\int_\varphi z^k \mathrm{d}z$ für $k \neq -1$ verschwindet, weil die monomiale Funktion $z \mapsto z^k$ dann eine Stammfunktion hat. Dies legt eine besondere Rolle des Koeffizienten a_{-1} in einer Laurententwicklung nahe.

Definition 2.5.1
Sei eine Funktion f mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder einem Banachraum E), auf der offenen Menge $U := \{z \in \mathbb{C} \,|0 < |z - z_0| < r\}$ analytisch, und z_0 eine Singularität von f. Der Koeffizient a_{-1} im Hauptteil von f wird das Residuum *von f im Punkt z_0 genannt. Wir schreiben*

$$a_{-1} =: \mathrm{Res}_{z=z_0} f.$$

Bemerkungen 2.5.2.

1. Nach der Koeffizientenformel aus Satz 2.4.6 für Laurentreihen ist das Residuum gleich dem Integral
$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} f(z)\mathrm{d}z$$
für ρ klein genug.

2. Ist die Singularität von f in z_0 hebbar, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.2 das Residuum $\mathrm{Res}_{z=z_0} f = 0$.

3. Eine analytische Funktion $f(z)$ habe einen Pol der Ordnung m an der Stelle z_0, so dass wir als Laurentreihe finden
$$f(z) \;= a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \ldots .$$
Dann hat die Funktion
$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \ldots$$
eine hebbare Singularität in z_0. Wir setzen sie holomorph fort. Dann gilt die für praktische Rechnungen wichtige Formel
$$(*) \qquad \mathrm{Res}_{z=z_0}(f) \stackrel{\text{def}}{=} a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\Big|_{z=z_0} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

Beispiel 2.5.3.

1. Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Aus der Reihenentwicklung der Kosinus-Funktion
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} \pm \ldots$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt $\mathrm{Res}_{z=0} f = 1$.

2. Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = e^{1/z}$. Wegen der Reihenentwicklung
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$
für $z \neq 0$ folgt $\mathrm{Res}_{z=0}\, e^{1/z} = 1$.

3. Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = e^{1/z^2}$. Aus der gleichen Reihenentwicklung für $z \neq 0$ folgt $\operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z^2} = 0$.

4. Sei U offen in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Die Funktionen $g, h \colon U \to \mathbb{C}$ seien holomorph. Ferner gelte $g(z_0) \neq 0$ und h habe in z_0 eine einfache Nullstelle, d.h. es gibt eine Potenzreihenentwicklung $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ mit $h'(z_0) = b_1 \neq 0$.

   Dann existiert
   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{b_1} \neq 0.$$
   und
   $$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

5. Die Funktion $f(z) := \dfrac{z+2}{(z-3)^3(z+3)}$ hat in $z_0 = 3$ einen dreifachen Pol. Sei
   $$g(z) := (z-3)^3 f(z) = \frac{z+2}{z+3} = 1 - \frac{1}{z+3},$$
   so ist $g''(z) = \dfrac{-2}{(z+3)^3}$, also wegen $(*)$
   $$\operatorname{Res}_{z=3}(f) = \frac{1}{2!}\frac{-2}{(3+3)^3} = -\frac{1}{216}.$$

6. Sei U offen in $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, und $0 \neq f$ meromorph auf U. Dann gilt für die *logarithmische Ableitung*
   $$F \colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} :$$
   $$\operatorname{Res}_{z=z_0}(F) = \omega(z_0; f).$$
   Denn es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$,
   $$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$
   wobei $g(z_0) \neq 0$ und g holomorph in einer Umgebung von z_0. Es ist
   $$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z),$$
   $$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$
   wobei $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ wegen $g(z_0) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist. Also ist
   $$\operatorname{Res}_{z=z_0}(F) = m.$$

Wir können nun einen weiteren zentralen Satz der Funktionentheorie formulieren:

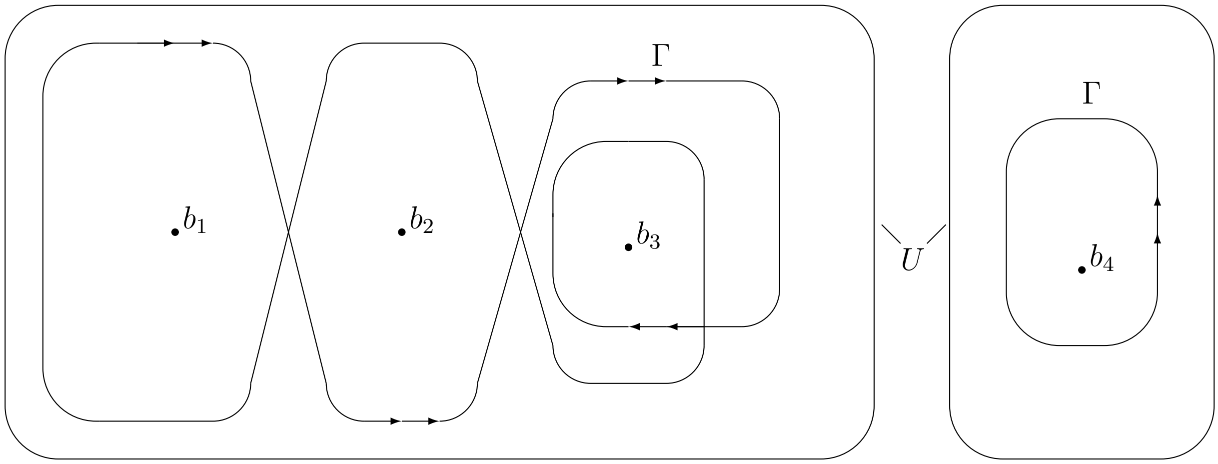
Theorem 2.5.4 (Residuensatz)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, (b_n) eine endliche oder unendliche Folge verschiedener Punkte von U und S die Menge der Punkte dieser Folge. Alle Punkte von S seien in U isolierte Punkte.

Es sei
$$f \colon U \setminus S \to \mathbb{C} \text{ holomorph},$$

Γ sei ein Zyklus in $U \setminus S$, Γ nullhomolog in U. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_n j(b_n; \Gamma)\,\mathrm{Res}_{z=b_n}(f).$$

Dabei gibt es auf der rechten Seite nur endliche viele von Null verschiedene Glieder.



Beweis.

1. Wir können die holomorphe Funktion f auf alle hebbaren singulären Punkte in S analytisch ausdehnen. Wegen $\mathrm{Res}_{z=b_n}(f) = 0$ für hebbare singuläre oder nicht-singuläre Punkte tragen solche b_n zur Summe auf der rechten Seite nicht bei. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jedes $b_n \in S$ ein nicht hebbarer singulärer Punkt für f ist.

2. Es ist der Abschluss
$$\overline{\{z \in U | j(z; \Gamma) \neq 0\}}$$
der Menge der Punkte, die in Bezug auf Γ nicht-verschwindenen Index haben, in $\mathbb{C}$ kompakt und in der offenen Menge U enthalten, vgl. Bemerkungen 2.3.6. Das heißt, $\{z \in U | j(z; \Gamma) \neq 0\}$ ist eine relativ kompakte Teilmenge von U. Eine diskrete relativ kompakte Teilmenge von U enthält aber nur endlich Punkte. Daher sei ab jetzt $S = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

3. Sei
$$\Gamma = \sum_{j=1}^{m} k_j \gamma_j$$
mit $k_j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und geschlossenen Wegen γ_j in $U \setminus S$. Um jedes b_ℓ nehmen wir einen kleinen Kreis mit Radius r_ℓ, so dass
$$B_{r_\ell}(b_\ell) \setminus \{b_\ell\} \subset U \setminus S$$
ist, und dazu einen Weg φ_ℓ, der den Rand dieses Kreises genau $j(b_\ell; \Gamma)$-mal durchläuft.

4. Sei
$$\Phi := \sum_{\ell=1}^{n} \varphi_\ell,$$

Dann ist auch $\Phi \sim_U 0$, und es gilt

$$\Phi \sim_{U\setminus S} \Gamma.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Phi f(z)\mathrm{d}z =& \sum_{\ell=1}^n \int_{\varphi_\ell} f(z)\mathrm{d}z \\ =& 2\pi i \sum_{\ell=1}^n j(b_\ell;\Gamma)\,\mathrm{Res}_{z=b_\ell}(f),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Entwicklung in eine gleichmäßig konvergente Laurent-Reihe, siehe Satz 2.4.6, und die Definition des Residuums benutzt haben.

□

Der Residuensatz erlaubt es, explizit bestimmte Integrale auszurechnen, die zum Teil im Rahmen der reellen Analysis nicht elementar zugänglich sind. Wir diskutieren fünf Beispielklassen.

Korollar 2.5.5 (Typ 1)**.**
Seien $p(x,y)$ und $q(x,y)$ Polynome mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten in zwei Unbestimmten. Sei $q(x,y)\neq 0$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x^2+y^2=1$. Setze

$$R(x,y) := \frac{p(x,y)}{q(x,y)}.$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{a\in B_1(0)} \mathrm{Res}_{z=a}(f),$$

wobei f die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z}R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))$$

ist. Man beachte, dass in der Summe wieder tatsächlich nur endlich viele Terme beitragen.

Beweis.

- Für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$ ist $\overline{z}=\frac{1}{z}$ und daher

$$\begin{array}{rcccl}\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) &=& \frac{1}{2}(z+\overline{z}) &=& \mathrm{Re}z\\ \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}) &=& \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) &=& \mathrm{Im}z\end{array}$$

  reell. Wegen $(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2=1$ ist $q(\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z)\neq 0$ für alle z auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene, also hat die rationale Funktion f auf dem Einheitskreis keine Pole.

- Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{aligned}2\pi\textstyle\sum_{a\in B_1(0)}\mathrm{Res}_{z=a}(f) &= \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} f(z)\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{1}{z}\mathrm{d}z \qquad [\text{Defn. von } f]\\ &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} R(\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}),\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it}))e^{-it}ie^{it}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 2.5.6 (zu Typ 1)**.**
Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \cos t}$$

für $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$. Es ist $R(x, y) = \frac{1}{a+x}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}.$$

Es gilt $z^2 + 2az + 1 = (z - \alpha)(z - \beta)$ mit Nullstellen

$$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad \beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Wegen der Voraussetzung $a > 1$ sind beide Wurzeln reell. Man rechnet leicht nach, dass aus $a > 1$ folgt $|\alpha| < 1$. Wegen $\alpha \cdot \beta = 1$ folgt $|\beta| > 1$. Wir finden somit nach Korollar 2.5.5

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t} \quad = \quad 2\pi \operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{2}{z^2+2za+1} = 4\pi \operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = 4\pi \frac{1}{\alpha-\beta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Integralen, die man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann.

Korollar 2.5.7 (Typ 2)**.**
Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei polynomiale Funktionen mit reellen Koeffizienten. Es gelte

$$\mathrm{grad} q \geq \mathrm{grad} p + 2$$

und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)},$$

die keine Pole auf der reellen Achse hat. Dann gilt:

1. Das uneigentliche Integral der Funktionen $|R(x)|$ und $R(x)$ über $\mathbb{R}$ existiert.

2. Das Integral ergibt sich zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=a_j} R(z),$$

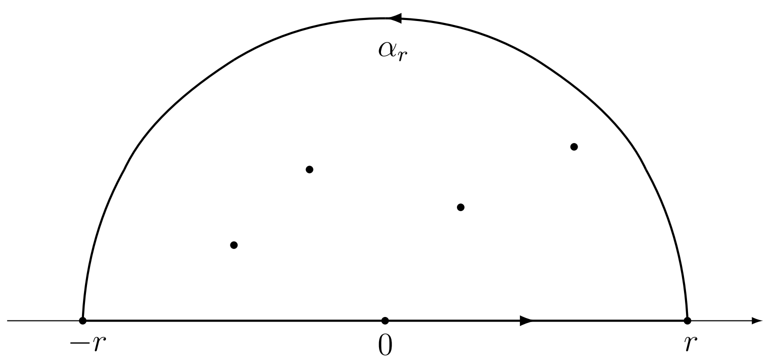
   wobei $a_1, a_2, \ldots a_k$ die Polstellen der Funktion $R(z)$ in der komplexen oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sind.

Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion auf die obere Halbebene kann man also reelle Integrale berechnen.

Beweis.

- Wegen der Annahme über das Nennerpolynom q ist die rationale Funktion R stetig auf $\mathbb{R}$. Sei
$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu z^\nu \text{ und } q(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$$
mit $n - m \geq 2$ und $c_n \neq 0$. Für $z \neq 0$ finde
$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = z^{m-n} \frac{\frac{b_0}{z^m} + \ldots + b_m}{\frac{c_0}{z^n} + \ldots + c_n}.$$
Für $|z| \to \infty$ strebt der zweite Faktor gegen b_m/c_n, ist also insbesondere beschränkt. Also existiert $M > 0$ und $c > 0$, so dass
$$|R(z)| \leq |z^{m-n}| \cdot M \text{ für alle } |z| > c$$
gilt. Wegen $n - m \geq 2$ folgt
$$|R(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} \cdot M \text{ für alle } |z| > c. \tag{7}$$
Insbesondere gilt für $z = x$ reell und für $0 < c < A$
$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^A |R(x)| \mathrm{d}x &= \int_0^c |R(x)| \mathrm{d}x + \int_c^A |R(x)| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^c |R(x)| \mathrm{d}x + M \cdot \int_c^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad \text{[wegen (7)]} \\ &= \int_0^c |R(x)| \mathrm{d}x + M(-\frac{1}{A} + \frac{1}{c}) \\ &\leq \int_0^c |R(x)| \mathrm{d}x + \frac{M}{c} < \infty. \end{aligned}$$
Das Integral $\int_0^A |R(x)| \mathrm{d}x$ mit nicht-negativem Integranden ist offenbar monoton wachsend als Funktion von A und gleichmäßig in A beschränkt. Es folgt, dass der Grenzwert
$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A |R(x)| \mathrm{d}x$$
existiert und einen endlichen Wert hat. Gleichermaßen schließt man für
$$\lim_{B \to \infty} \int_{-B}^0 |R(x)| \mathrm{d}x.$$

- Wir betrachten für jedes $r > 0$ den geschlossenen Weg γ_r mit
$$\gamma_r(t) := \begin{cases} t & \text{für } -r \leq t \leq r \\ re^{i(t-r)} & \text{für } r \leq t \leq r + \pi. \end{cases}$$



Die Kurve ist also die Aneinanderhängung des Intervalls $[-r, r]$ auf der reellen Achse mit einem Halbkreis α_r in der oberen Halbebene vom Radius r. Da q ein Polynom ist, hat R höchstens endlich viele Polstellen in der oberen Halbebene. Wir wählen der Radius r des Halbkreises α_r so groß, dass der Halbkreis alle Polstellen der rationalen Funktion R in der oberen Halbebene umfasst. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\alpha_r} R(z)\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=a_j} R(z).$$

Wir schätzen das erste Integral über den Halbkreis α_r ab:

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_{\alpha_r} R(z)\mathrm{d}z\right| & = & \left|\int_0^\pi R(re^{it})rie^{it}\mathrm{d}t\right| \leq r\int_0^\pi |R(re^{it})|\mathrm{d}t \\ & \leq & r\frac{M}{r^2}\pi = \frac{M\pi}{r}, \end{array}$$

wobei wir wieder die Abschätzung (7) benutzt haben. Dieser Beitrag geht für $r \to \infty$ gegen Null. Da außerdem gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x,$$

folgt die Behauptung.

□

Beispiel 2.5.8 (zu Typ 2)**.**
Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{r\to\infty} \arctan x\Big|_{-r}^{r} = \pi.$$

Es gilt $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, also hat die Funktion $\frac{1}{z^2+1}$ genau eine Polstelle in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$, nämlich $+i$. Es gilt

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Mit dem vorangegangenen Satz 2.5.7 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Man kann mit dem Residuensatz auch Fourierintegrale berechnen:

Korollar 2.5.9 (Typ 3)**.**
Sei f eine Funktion, die in allen $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}z \geq 0$ komplex differenzierbar ist, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten z_0, für die $\mathrm{Im}z_0 \neq 0$ ist, und es gelte $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} |f(z)| = 0$.

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_0>0} \mathrm{Res}_{z=z_0}\left(f(z)e^{iz}\right).$$

Beweis.
Man integriert die Funktion $f(z) \cdot e^{iz}$ über denselben Weg wie in Korollar 2.5.7 und erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_0 > 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}(f(z)e^{iz}) - \lim_{r\to\infty} \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z,$$

mit dem Halbkreis $\alpha_r \colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha_r(t) := re^{it}$, falls der Limes existiert. Mit der Schranke $M_r := \sup\{|f(z)|, |z| = r, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ gilt:

$$\left|\int_{\alpha_r} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi f(re^{it})e^{ire^{it}} \cdot ire^{it}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi r|f(re^{it})| \cdot |e^{-r\sin t}|\mathrm{d}t$$

$$\leq rM_r \int_0^\pi e^{-r\sin t}\mathrm{d}t = 2rM_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\mathrm{d}t.$$

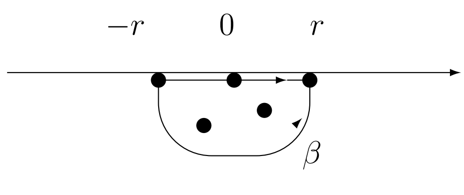
Im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\sin t \geq \dfrac{2}{\pi}t$ und daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}rt}\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2r}e^{-\frac{2r}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r}(1-e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2r}, \text{ also}$$

$$\left|\int_{\alpha_r} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z\right| \leq \pi \cdot M_r \to 0(\text{ für } r \to \infty).$$

□

Bemerkung 2.5.10 (Typ 3').
Sei f eine Funktion auf der unteren Halbebene, $\mathrm{Im} z_0 \leq 0$, die mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten z_0, für die Im $z_0 \neq 0$ ist, holomorph ist. Indem man statt den Weg aus Korollar 2.5.7 einen Weg der Form



betrachtet, um $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x$ zu berechnen, erhält man die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_0 < 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}(f(z)e^{-iz}),$$

Zu summieren ist hier über alle Singularitäten in der unteren Halbebene, und man muss voraussetzen, dass

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)\leq 0}} |f(z)| = 0.$$

Beispiel 2.5.11 (zu Typ 3).
Es ist

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x \overset{2.5.9}{=} \mathrm{Re}\left(i\pi\sum_{\mathrm{Im}z_0>0}\mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)\right),$$

wobei über alle Pole in der oberen Halbebene summiert wird. Die Voraussetzung von Korollar 2.5.9 ist erfüllt: für $z = re^{it}$ und $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ gilt

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} |f(z)| = \lim_{\substack{r\to\infty \\ t\in[0,\pi]}}\left|\frac{1}{1+r^2e^{2it}}\right| = 0,$$

weil $|\dfrac{1}{1+r^2e^{2it}}| \leq \dfrac{1}{r^2-1}$ gilt. Nun hat die Funktion $\frac{e^{iz}}{1+z^2}$ nur bei $z_0 = i$ einen einfachen Pol mit $\mathrm{Im}z_0 > 0$. Für das Residuum gilt nach Beispiel 2.5.3.4:

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \frac{e^{iz_0}}{2z_0} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie},$$

also gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}.$$

Korollar 2.5.12 (Typ 4).
Sei $0 < \alpha < 1$ und R eine reelle rationale Funktion, die auf der positiven Halbachse $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definiert ist und für die $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$ gilt. Wir setzen für $z = |z|e^{i\theta}$ mit $\theta \in (0, 2\pi)$ auf der geschlitzten komplexen Ebene

$$(*) \quad z^\alpha := |z|^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$

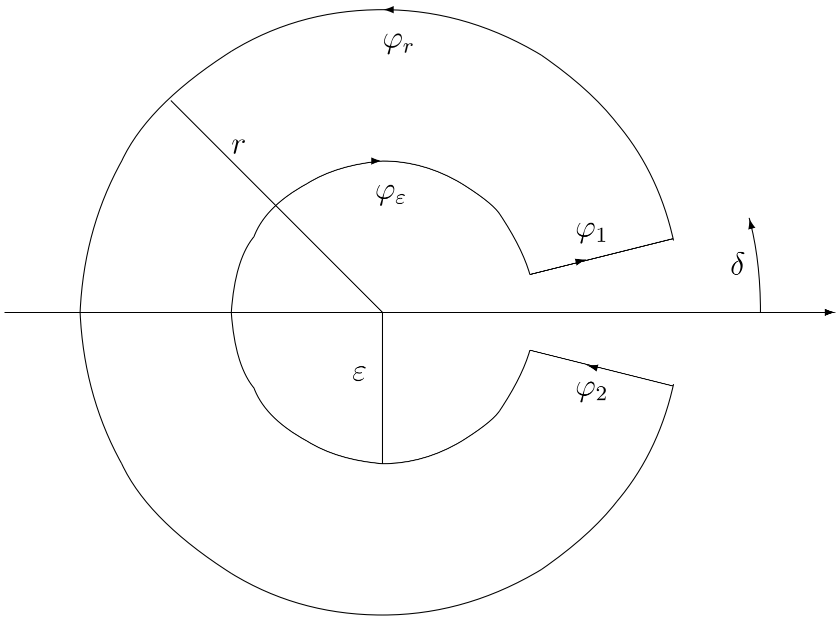
Dann gilt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\cdot\sum_{z_0\neq 0}\mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right).$$

Beweis.
Nach den Voraussetzungen an die rationale Funktion R gibt es eine Konstante c mit $|R(x)| \leq c\cdot\dfrac{1}{x}$ für alle $x \geq 1$.

Wegen $\left|\dfrac{R(x)}{x^\alpha}\right| \leq \dfrac{c}{x^{\alpha+1}}$ folgt, dass das Integral $\int\limits_1^\infty \dfrac{R(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ für $0 < \alpha$ konvergiert. Ferner ist die Funktion $R(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig und somit beschränkt. Also konvergiert das Integral $\int\limits_0^1 \dfrac{R(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ für $\alpha < 1$. Insgesamt konvergiert das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \dfrac{R(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ für alle $0 < \alpha < 1$.

Wir betrachten nun den folgenden geschlossenen Weg in $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$, der aus vier Wegen $\varphi_1, \varphi_r, \varphi_2, \varphi_\varepsilon$ zusammengesetzt ist:



Wir integrieren nun $\dfrac{R(z)}{z^\alpha}$, wobei z^α die in $(*)$ definierte Funktion ist. Bei der Wahl von θ in $(*)$ haben wir die Funktion z^α so definiert, dass sie in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ holomorph ist. Wir wählen r so groß und ε und δ so klein, dass für alle Pole $z_0 \neq 0$ von $\dfrac{R(z)}{z^\alpha}$ der Index von φ gleich 1 ist, $j(z_0; \varphi) = 1$. Dann gilt

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{R(z)}{z^\alpha} = \int_\varphi \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z = \int_{\varphi_r} \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z + \int_{\varphi_\varepsilon} \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z + \int_{\varphi_1} \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z.$$

Aus $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$ und $0 < \alpha < 1$ folgt nun, dass die Integrale über die Kreissegmente φ_r und φ_ε für $r \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ gegen 0 gehen. Man erhält

$$\int_\varphi \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty, \varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^r \frac{R(te^{i\delta})}{(te^{i\delta})^\alpha} e^{i\delta} \mathrm{d}t - \int_\varepsilon^r \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{(te^{i(2\pi-\delta)})^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)} \mathrm{d}t \right)$$

$$= e^{-i\alpha\delta} \int_0^\infty \frac{R(te^{i\delta})}{t^\alpha} e^{i\delta} \mathrm{d}t - e^{i\alpha\delta - 2\pi i\alpha} \int_0^\infty \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{t^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)} \mathrm{d}t.$$

Wir bilden nun den Limes für $\delta \to 0$:

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} \left(\frac{R(z)}{z^\alpha} \right) = \left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

□

Beispiel 2.5.13 (zu Typ 4)**.**
Wir wollen das Integral

$$I := \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} \text{ für } \alpha \in (0,1)$$

berechnen. Die Funktion $\dfrac{R(z)}{z^\alpha} := \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)}$ hat nur bei $z_0 = -1$ einen von Null verschiedenen Pol erster Ordnung. Es ist für z^α wie in Korollar 2.5.12 definiert:

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^\alpha} = \frac{1}{(-1)^\alpha} = \frac{1}{(1\cdot e^{i\pi})^\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}}.$$

Daher ist das Integral I

$$I = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}} \cdot \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Korollar 2.5.14 (Typ 5)**.**
Sei R eine reelle rationale Funktion, die auf der positiven Halbachse $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ keine Pole hat und für die gilt

$$\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0.$$

Wir betrachten einen Zweig $l(z)$ des Logarithmus, der auf der geschlitzten komplexen Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ holomorph ist:

$$(**) \qquad \ell\colon \mathbb{C}^*\setminus\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}, \quad \ell(re^{i\theta}) := \ln r + i\theta, \text{ mit } \theta \in (0,2\pi).$$

Dann gilt

$$\int\limits_0^\infty R(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\sum_{z_0\neq 0}\operatorname{Res}_{z=z_0}(R(z)\ell(z)^2)\right)$$

und

$$\int\limits_0^\infty R(x)\ln x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{z_0\neq 0}\operatorname{Res}_{z=z_0}(R(z)\ell(z)^2)\right).$$

Beweis.
Wir nehmen denselben Integrationsweg φ wie in Korollar 2.5.12 und integrieren die Funktion $R(z)\ell(z)^2$ über φ. Wiederum lässt sich zeigen, dass die Wegintegrale über die Strecken φ_r und φ_ε für $r\to\infty$ und $\varepsilon \to 0$ gegen 0 gehen. Damit folgt für $\delta \to 0$:

$$2\pi i \sum_{z_0\neq 0}\operatorname{Res}_{z=z_0} R(z)\ell(z)^2 = \int\limits_0^\infty R(te^{i\delta})(\ln t + i\delta)^2 e^{i\delta}\mathrm{d}t$$

$$- \int\limits_0^\infty R(te^{i(2\pi-\delta)})(\ln t + i(2\pi-\delta))^2 e^{i(2\pi-\delta)}\mathrm{d}t,$$

und für $\delta \to 0$:

$$\ldots = \int\limits_0^\infty R(t)(\ln t)^2\mathrm{d}t - \int\limits_0^\infty R(t)(\ln t + 2\pi i)^2\mathrm{d}t$$

$$= -4\pi i \int_0^\infty R(t)\ln t \mathrm{d}t + 4\pi^2 \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t,$$

also

$$-2\int_0^\infty R(t)\ln t\mathrm{d}t - 2\pi i \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t = \sum_{z_0\neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} R(z)\ell(z)^2.$$

Da die Funktion R nach Voraussetzung auf $\mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt, können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung Imaginär- und Realteil bilden und erhalten die angegebenen Formeln. □

Beispiel 2.5.15 (zu Typ 5)**.**
Wir wollen das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

berechnen. Für die Funktion $R(x) := \dfrac{1}{(1+x)^3}$ gilt $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3} = 0$. Ferner hat die Funktion $R(z) = \dfrac{1}{(1+z)^3}$ an der Stelle $z_0 = -1$ einen dreifachen Pol. Nach Bemerkung 2.5.2.3 ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=-1}(R(z)\ell(z)^2) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z+1)^3R(z)\ell(z)^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\ell(z)^2 = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(2\ell(z)\cdot\frac{1}{z}\right) \\
&= \lim_{z\to-1}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z} - \ell(z)\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{(-1)^2} - \frac{\ell(-1)}{(-1)^2} = 1 - i\pi.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus Korollar 2.5.14, dass

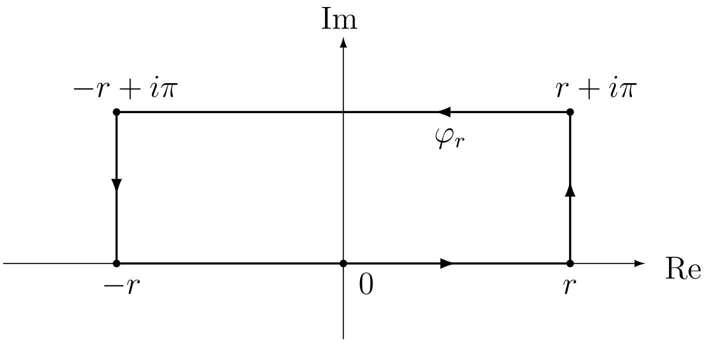
$$I = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(1-i\pi) = -\frac{1}{2}$$

und nebenbei noch

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}(1-i\pi) = -\frac{1}{2\pi}(-\pi) = \frac{1}{2}.$$

Wir bringen abschließend noch ein letztes Beispiel:

Beispiel 2.5.16.
Zu berechnen ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$. Dazu integrieren wir die Funktion $\dfrac{1}{\cosh z}$ über den Rand φ_r des folgenden Rechtecks:



und finden für das Integral über den Rand φ_r

$$\int\limits_{\varphi_r} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} = \int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} - \int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh(t+i\pi)} + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{i\mathrm{d}t}{\cosh(r+it)} - \int\limits_{0}^{\pi} \frac{i\mathrm{d}t}{\cosh(-r+it)}.$$

Nun gilt

$$\left| \int\limits_{0}^{\pi} \frac{i\mathrm{d}t}{\cosh(r+it)} \right| \leq \pi \cdot \sup_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{|\cosh r \cos t + i \sinh r \sin t|}$$

$$= \pi \cdot \sup_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 r \cos^2 t + \sinh^2 r \sin^2 t}} = \frac{\pi}{\sinh r}.$$

Wegen $\lim_{r\to\infty} \sinh r = \infty$ ergibt sich der Grenzwert des Randintegrals zu

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\varphi_r} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh(t+i\pi)};$$

wegen $\cosh(t+i\pi) = -\cosh t$ folgt aus dem Residuensatz

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = 2\pi i \sum_{0\,<\,\mathrm{Im}\ a\,<\,\pi} \mathrm{Res}_{z=a} \left(\frac{1}{\cosh z} \right),$$

denn auf der reellen Achse hat die Funktion $\dfrac{1}{\cosh z}$ keine Singularitäten.

Für $0 < \mathrm{Im} a < \pi$ ist $\cosh a = 0$ nur für $a = i\frac{\pi}{2}$. Es ist $i\frac{\pi}{2}$ ein einfacher Pol wegen

$$\cosh'(i\frac{\pi}{2}) = \sinh(i\frac{\pi}{2}) = i \sin\frac{\pi}{2} = i \neq 0.$$

Nach Bemerkung 2.5.2.3 ist daher das Residuum

$$\mathrm{Res}_{z=i\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cosh z} \right) = \frac{1}{\cosh'\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = -i,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = i\pi\, \mathrm{Res}_{z=i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh z} = \pi.$$

Bemerkung 2.5.17.

1. Wir können nun auch eine andere Form verallgemeinerter Funktionen einführen, die Distributionen einschließen. Eine *Hyperfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist ein Paar (f, g), wobei f eine holomorphe Funktion auf der oberen und g eine holomorphe Funktion auf der unteren komplexen Halbebene ist. Für jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ identifizieren wir die Hyperfunktionen (f, g) und $(f - h, g - h)$. Informell stellen wir uns die Hyperfunktion als das vor, was die Differenz $f - g$ auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ wäre.

2. Hyperfunktionen bilden einen Vektorraum; sie können komponentenweise differenziert werden.

3. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *holomorpher Punkt* der Hyperfunktion $f = (f_+, f_-)$, wenn die Einschränkung f auf eine Umgebung von a äquivalent zu einer holomorphen Funktion ist. Sind a, b holomorphe Punkte von f, so wählen wir Kurven $\gamma_\pm\colon [0,1] \to \mathbb{C}_\pm$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, die in der oberen bzw. unteren Halbebene verlaufen. Wir setzen dann
$$\int_a^b f := -\int_{\gamma_+} f_+ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_-} f_- \mathrm{d}z.$$
Da die obere und untere Halbebene einfach zusammenhängend sind, ist dieser Ausdruck wegen des Cauchyschen Integralsatzes bzw. Korollar 2.3.5 von der Wahl der Wege $\gamma_\pm$ unabhängig.

4. Ist f eine Hyperfunktion mit kompaktem Träger und φ eine (komplex-)analytische Funktion auf (einer Umgebung von) $\mathbb{R}$, so haben wir eine bilineare Paarung
$$(f, \varphi) \mapsto \int f \cdot \varphi,$$
die den Dualraum $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$ des Raumes $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ der analytischen Funktionen mit dem Raum der Hyperfunktionen mit kompaktem Träger sogar identifiziert.

5. Wir betrachten nun die von Null verschiedene Hyperfunktion $\delta := (\frac{1}{2\pi i z}, \frac{1}{2\pi i z})$. Wir finden für jede reell analytische Funktion φ
$$\int \delta \cdot \varphi = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{2\pi i z} \varphi(z) \mathrm{d}z = \varphi(0),$$
wobei wir im letzten Schritt die Cauchysche Integralformel 2.3.10 benutzt haben. Damit haben wir eine Hyperfunktion gefunden, die der Dirac-Distribution entspricht.

6. Sei nun g eine beliebige Distribution mit Träger in einem kompakten Intervall I. Dann definieren wir durch Faltung von g mit δ, also $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_I g(x) \frac{1}{z - x} \mathrm{d}x$, eine Hyperfunktion, die an der reellen Achse auf I springt. Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins kann man so jede Distribution in die Hyperfunktionen einbetten. Aber Funktionen mit wesentlichen Singularitäten wie $e^{1/z}$ liefern Hyperfunktionen, die keine Distributionen sind.

Literatur

[FL] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg, Wiesbaden, 2005

[F3] Otto Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011

[H] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006

[H01] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006

[Koe] Max Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, Grundwissen Mathematik, Band 2, 1983

[K2] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004

[MT] Ib Madsen, Jørgen Tornehave, *From Calculus to Cohomology, De Rham Cohomology and Characteristic Classes*, Cambridge University Press, 1997

[RS] Michael Reed und Barry Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972

[R1] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer, Berlin/Heidelberg

[T] Hans Triebel, *Höhere Analysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[W] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2007