1. Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2012

Prof. Dr. Birgit Richter

23.07.2012

Viel Erfolg!

Name:	
Matrikelnummer:	

(1) (2 Punkte)

Wo ist die Funktion $z \mapsto |z|^2$ komplex differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2) (3 Punkte)

Es sei $\Phi_A(z)$ die Möbiustransformation zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Besitzt Φ_A auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(3) (1 Punkt)

Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^{z^2-z}(\sin(z) - z^7)}{z - 9i} dz.$$

(4) (2 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma z dz$ für $\gamma(t) = te^{2\pi i t}$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes.

(5) (4 Punkte)

Welche Typen isolierter Singularitäten gibt es und wie sind diese definiert? Bestimmen Sie den Typ der Singularität der Abbildung $z \mapsto \exp(1/z)$.

(6) (2 Punkte)

Welche Singularitäten hat die Funktion $f(z) = (z - i/2)^{-2} \cos(z)$ auf $\bar{\mathbb{C}}$?

(7) (1 Punkt)

Was ist der Hauptteil in ∞ der rationalen Funktion

$$z \mapsto \frac{z^4}{z^2 - 1}?$$

(8) (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurententwicklung der Abbildung $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ auf dem Kreisring $A(0; 1, 2)$.

(9) (4 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie den Satz von Liouville über ganze Funktionen, indem Sie die Cauchysche Integralformel benutzen.

(10) (3 Punkte)

Berechnen Sie das Residuum von $f(z) = \frac{exp(z)}{z^2}$, indem Sie die Laurententwicklung von f um $z_0 = 0$ betrachten. Benutzen Sie das Ergebnis, um mit dem Residuensatz $\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z^2} dz$ zu bestimmen.

(11) (2 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist.