Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 9 Abgabetermin: Freitag, 24.6. 2005

Aufgabe 33 ($SL_2(\mathbb{R})$) 2 + 2 Punkte

a) Wir hatten in der Vorlesung die Operation der $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathcal{H}$ besprochen. Was ist der Stabilisator von $i \in \mathbb{C}$ unter $SL_2(\mathbb{R})$?

b) Zeigen Sie, dass $SL_2(\mathbb{R})/SO(2) \cong \mathcal{H}$.

Aufgabe 34 (Brieskorn Mannigfaltigkeiten) 2 Punkte

Es sei $W_d^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ für $d, n \geqslant 2$ der Unterraum, der definiert ist als Menge aller $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, die den beiden Gleichungen

$$z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0 \text{ und } |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 2$$

genügen.

Zeigen Sie, dass W_d^{2n-1} ein $O(n)$-Raum ist, wenn man $O(n)$ durch gewöhnliche Matrizenmultiplikation auf $(z_1, \ldots, z_n)$ operieren lässt.

Zur Allgemeinbildung: Brieskorn-Mannigfaltigkeiten sind Beispiele sogenannter *exotischer Sphären*. Für ungerade d und n ist W_d^{2n-1} homöomorph zu $\mathbb{S}^{2n-1}$, aber nicht immer diffeomorph zu $\mathbb{S}^{2n-1}$.

Aufgabe 35 (Fixpunkte) 2 + 1 Punkte

Es sei X ein G-Raum. Für eine Untergruppe $H < G$ sei X^H der Unterraum der Fixpunkte der H-Operation, also $X^H = \{x \in X; hx = x \text{ für alle } h \in H\}$. Zeigen Sie:

a) Ist X hausdorffsch, so ist X^H abgeschlossen für alle Untergruppen H von G.

b) Sind H und K Untergruppen von G, so ist $X^H \cap X^K$ wiederum Fixpunktmenge einer geeigneten Untergruppe von G. Welcher?

Aufgabe 36 (Gruppenoperationen auf Mannigfaltigkeiten) 3 Punkte

Es sei G eine endliche Gruppe (natürlich mit der diskreten Topologie), die auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M frei operiert. Hierbei sei M geschlossen, d.h. $\partial M = \varnothing$ und M ist kompakt. Zeigen Sie, dass M/G wieder eine n-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit ist.

Kür-Aufgabe (Stiefel-Mannigfaltigkeiten) 2 + 2 Pseudopunkte

Die Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_{n,k}, 1 \leqslant k \leqslant n$ sei die Menge aller k-Tupel orthonormaler Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Topologisiert ist $V_{n,k}$ als Unterraum von $\prod_{i=1}^k \mathbb{S}^{n-1}$.

a) Zeigen Sie, dass $V_{n,n} = O(n)$, $V_{n,1} = \mathbb{S}^{n-1}$ und beschreiben Sie $V_{n,2}$ als Raum aller Einheitstangentialvektoren an die $\mathbb{S}^{n-1}$.

b) Betrachten Sie die Projektion $p : O(n) \to V_{n,k}$, die eine Matrix in $O(n)$ auf ihre letzten k Spaltenvektoren abbildet. Zeigen Sie damit, dass

$$V_{n,k} \cong O(n)/O(n-k).$$