Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 8 Abgabetermin: Freitag, 17.6. 2005

Aufgabe 29 (Endlich erzeugte abelsche Gruppen) 3 Punkte
Konstruieren Sie zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe A einen expliziten topologischen Raum X_A mit einem Grundpunkt x_0, so dass $\pi_1(X_A, x_0) \cong A$.

Aufgabe 30 (Verklebte Volltori) 3 Punkte
Es sei $X = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \cup_f \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, wobei $f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ für ganze Zahlen a, b, c und d . Berechnen Sie $\pi_1(X, ((1,0),(1,0)))$ in Abhängigkeit von a, b, c, d.

Aufgabe 31 (Einhängungen) 2 Punkte
Zeigen Sie, dass die Einhängung ΣX und die reduzierte Einhängung $\Sigma' X$ eines wegzusammenhängenden Raumes X mit Grundpunkt x_0 einfach zusammenhängend sind. Hierbei ist $\Sigma X = (X \times I / X \times \{0\})/[X \times \{1\}]$ und $\Sigma' X = \Sigma X / [\{x_0\} \times I]$.

Aufgabe 32 (Flächengruppen) 3 Punkte
Berechnen Sie induktiv die Fundamentalgruppe einer orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht g. Wir hatten den Fall $g = 2$ in der Vorlesung besprochen. Setzen Sie $F_g := (F_{g-1} \setminus \mathring{\mathbb{D}}^2) \cup_{\mathbb{S}^1} (F_1 \setminus \mathring{\mathbb{D}}^2)$.

Kür-Aufgabe (Knotengruppen) 4 Pseudopunkte
a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent ist. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1, 0) \cong \mathbb{Z}$.

b) Ist die Fundamentalgruppe des Komplements der Kleeblattschlinge auch $\mathbb{Z}$? Bestimmen Sie allgemeiner $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T(p,q))$, wobei $T(p,q)$ der Torusknoten zu den Parametern (p,q) ist, d.h. unter dem Homöomorphismus aus Aufgabe 8 entspricht $T(p,q)$ der geschlossenen Kurve $t \mapsto (\exp 2\pi i p t, \exp 2\pi i q t)$ auf $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Hierbei sind p und q teilerfremde ganze Zahlen, die grösser oder gleich 2 sind.

(Überlegen Sie sich zum Beispiel zuerst, dass $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T(p,q)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus T(p,q))$, weil $\mathbb{S}^3$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^3$ ist. Betrachten Sie in $\mathbb{S}^3$ eine abgeschlossene ε-Umgebung des Torusknotens und das Komplement. Das Komplement eines Volltorus in $\mathbb{S}^3$ ist wieder ein Volltorus. Konstruieren Sie damit eine geeignete Zerlegung von $\mathbb{S}^3 \setminus T(p,q)$, damit Sie den Satz von Seifert-van Kampen anwenden können.)