Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 7 Abgabetermin: Freitag, 10.6. 2005

Aufgabe 25 (Fundamentalgruppen topologischer Gruppen) 1+1+1+1 Punkte

Es sei G eine topologische Gruppe, also eine Gruppe G, die ein topologischer Raum ist, so dass die Verknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so definieren wir auf $[X, G]$ eine Multiplikation durch $[f] \bullet [g] := [f \bullet g]$, wobei $(f \bullet g)(x) := f(x)g(x)$.

a) Zeigen Sie, dass $[X, G]$ dadurch eine Gruppe wird.

b) Betrachten Sie $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ und zeigen Sie, dass dies ebenfalls eine Gruppe ist.

c) Beweisen Sie, dass für $(X, x_0) = (\mathbb{S}^1, 1)$ die beiden Multiplikationen $f * g$ und $f \bullet g$ übereinstimmen.

d) Auch für nichtabelsche Gruppen G ist $\pi_1(G, 1)$ abelsch.

Aufgabe 26 (freie Produkte) 1+1+1 Punkte

Betrachten Sie das freie Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht endlich.

b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht abelsch.

c) Gelten a) und b) für beliebige freie Produkte $G_1 * G_2$?

Aufgabe 27 (Kompakt-offenen Topologie auf Abbildungsräumen) 1+1+1 Punkte

Auf der Menge $C(X, Y)$ aller stetigen Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y ist die kompakt-offenen Topologie diejenige, die als Subbasis die Mengen $U(K, O)$ aller stetigen Abbildungen $f \in C(X, Y)$ hat, die eine kompakte Menge $K \subset X$ in eine offene Menge $O \subset Y$ abbilden:

$$U(K, O) = \{f \in C(X, Y); f(K) \subset O\}.$$

Zeigen Sie:

a) Ist Y hausdorffsch, so auch $C(X, Y)$.

b) Die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X, Y) \times X \longrightarrow Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$ ist stetig, falls X lokal-kompakt ist.

c) Sind X, Y, hausdorffsch und Y lokal-kompakt, so gilt das Exponentialgesetz:

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y, Z)).$$

Aufgabe 28 (Zur Homotopieäquivalenz) 1+2 Punkte

a) Zu $f : X \to Y$ gebe es $h, k : Y \to X$ mit $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ k \simeq \mathrm{id}_Y$. Beweisen Sie, dass dann schon X homotopieäquivalent ist zu Y.

b) Wir hatten in der Übung Konfigurationsräume behandelt. Zeigen Sie, dass $C_2(\mathbb{R}^3)$ homotopieäquivalent ist zur reellen projektiven Ebene. Es ist sinnvoll, sich vorher klarzumachen, zu welchem Raum $\widetilde{C}_2(\mathbb{R}^3)$ bzw. allgemeiner $\widetilde{C}_2(\mathbb{R}^n)$ homotopieäquivalent ist.

Kür-Aufgabe (Parakompaktheit) 1+1+1+1 Pseudopunkte

Ein Hausdorffraum heisst parakompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X eine feinere, lokal-endliche, offene Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X gibt. Hierbei heisst lokal-endlich, dass es für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt, die nur endlich viele Mengen aus $\mathfrak{V}$ nicht-trivial schneidet.

a) Parakompakte Räume sind normal.

b) Zeigen Sie, dass es für jede offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ eines parakompakten Raumes X eine untergeordnete Partition der Eins gibt, d.h. es gibt stetige Abbildungen $\{f_i, i \in \mathcal{I}\}$, $f_i : X \to \mathbb{R}$ mit

1) $f_i(x) \geqslant 0$ für alle $x \in X$ und alle $i \in \mathcal{I}$,
2) die Träger der f_i sind lokal-endlich,
3) für $i \in \mathcal{I}$ ist der Träger von f_i in U_i enthalten und
4) $\sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) = 1$ für alle x in X.

c) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^n$ parakompakt ist.

d) Beweisen Sie, dass jede Mannigfaltigkeit parakompakt ist.