Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 6 Abgabetermin: Freitag, 3.6. 2005

Aufgabe 21 (Lebesgue-Zahl) 2 Punkte
Sei X ein kompakter metrischer Raum. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Metrik auf X beschränkt ist. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei $\mathrm{diam}(S) := \sup\{d(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S\}$ der Durchmesser der Teilmenge S. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Zahl $\lambda > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\mathrm{diam}(S) < \lambda$ in einem U_i liegt.

Aufgabe 22 (Kegel) 1 + 1 + 2 Punkte
Sei X ein beliebiger Raum. Der Kegel auf X, CX sei definiert als $CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$. Hat X einen Grundpunkt $x_0 \in X$ so betrachtet man den reduzierten Kegel $C'X = X \times [0,1]/(X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0,1])$.

a) Zeigen Sie, dass CX und $C'X$ zusammenziehbar sind. Was ist der Kegel über $\mathbb{S}^n$?

Der Raum X kann als Unterraum des Kegels aufgefasst werden, indem man X mit $X \times \{0\}$ identifiziert. Es sei $i : X \to CX$ die Inklusion.

b) Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich auf den Kegel CX fortsetzen lässt.

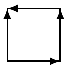
Der Abbildungskegel einer Abbildung $f : X \to Y$ ist definiert als $C_f := Y \cup_f CX$. Hierbei ist Y in kanonischer Weise Unterraum von C_f.

c) Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Verkettung von Abbildungen. Beweisen Sie, dass $g \circ f$ genau dann nullhomotop ist, falls man g über den Kegel von f faktorisieren kann:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & Z \\ & C_f \arrow[ur, dotted, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

, d.h. es gibt ein $\bar{g}$ mit $\bar{g} \circ i = g$.

Aufgabe 23 (Kleinsche Flasche) 2 Punkte
Die Kleinsche Flasche, $\mathcal{K}$, sei der topologische Raum, der durch die folgende Identifizierung aus dem Einheitsquadrat entsteht:



Zeigen Sie, dass die Kleinsche Flasche homöomorph ist zu $M \cup_{\partial M} M$, wobei M das Möbiusband ist und ∂M sein Rand.

Aufgabe 24 (Einige Homotopieäquivalenzen) 1+1+1+1 Punkte
Zeigen Sie, dass folgende Räume homotopieäquivalent sind. Dabei können Sie sich einen beliebigen Punkt $*$ im jeweiligen Raum aussuchen.

$T \backslash *$ und $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, $\mathcal{K} \backslash *$ und $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}P^{n+1} \backslash *$ und $\mathbb{R}P^n$, und schliesslich $\mathbb{C}P^{n+1} \backslash *$ und $\mathbb{C}P^n$.

Kür-Aufgabe (Mannigfaltigkeiten) 2 + 2 Pseudopunkte
Eine d-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal euklidisch ist, d.h. zu jedem Punkt x gibt es eine offene Umgebung von x in M, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{C}P^n$ Mannigfaltigkeiten sind.

Eine Karte $h : U \to V$ ist ein Homöomorphismus offener Mengen $U \subset M$ und $V \subset \mathbb{R}^d$. Eine Menge $\{h_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ von Karten heisst Atlas, falls $M = \cup_{i \in I} U_i$. Es sei $\mathbb{R}^d_- = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, x_1 \leqslant 0\}$ der euklidische Halbraum. Eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie und einem Atlas $\{h_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$, wobei die $V_i \subset \mathbb{R}^d_-$ offen sind in $\mathbb{R}^d_-$. Der Rand von M, ∂M besteht dann aus allen Punkten x, für die es eine Karte $h : U \to V$ gibt mit $h(x) \in \partial \mathbb{R}^d_- = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, x_1 = 0\}$. Sind M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension d und ist f ein Homöomorphismus von ∂M_1 und ∂M_2 so heisst $M_1 \cup_f M_2$ die verbundene Summe von M_1 und M_2.

b) Beweisen Sie, dass $M_1 \cup_f M_2$ wieder eine Mannigfaltigkeit der Dimension d ist.